УДК 004.891

И.В. Шостак

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Рассмотрены метрические свойства информационного пространства интегрированных экспертных систем поддержки принятия решений по управлению сложными организационно-техническими объектами, отдельные элементы которых (типовые блоки принятия решений) интерпретированы, с позиций аналитической геометрии, в виде точек дискретного пространства.

Ключевые слова: *дискретное информационное пространство, предельная точка, фундаментальная последовательность, класс эквивалентности, общность, метаобщность, гетерогенность общности, кластеризация.*

Введение

Применение экспертных систем поддержки принятия решений (ЭСППР) в задачах управления сложными организационно-техническими объектами (СОТО) обусловлена устойчивой тенденцией к их усложнению, которая проявляется в опережающем возрастании сложности взаимосвязей между элементами объекта по сравнению с количеством этих взаимосвязей и количеством элементов в составе СОТО. Указанная тенденция в развитии СОТО, а также необходимость применения ЭСППР для управления ими, на современном этапе привела к невозможности обеспечения необходимой эффективности функционирования сложных объектов за счет использования только традиционных, аналитических моделей и методов. Вместе с тем, ЭСППР являются по своей природе системами закрытого типа [1], что не позволяет объединять их с целью создания единого информационного пространства в рамках СОТО.

Проблема создания единого информационного пространства в рамках сложного, топологически распределенного объекта принятия решений, где иерархически объединенные между собой ЭСППР образовали бы своеобразную среду для размещения в ней традиционных элементов ИМС [2], предполагает введение расстояния (метрики) между отдельными позициями, занимаемыми типовыми блоками принятия решений (БПР). Для решения указанной задачи целесообразно рассматривать позиции в виде точек некоего пространства (в простейшем случае двумерного), тогда появляется возможность использования аппарата аналитической геометрии при исследовании метрических свойств [3] единого информационного пространства интегрированной ЭСППР (ИЭСППР).

Целью данной статьи является определение метрических свойств единого информационного пространства управления СОТО, которое наряду с традиционной, аналитической, включает интеллектуальную компоненту в форме ИСППР.

Основная часть

Анализ соотносительных свойств позиций БПР требует введения расстояния (метрики) между позициями в информационном пространстве. Для этого естественно воспользоваться формулой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{M}\left(x_i-y_i\right)^2\right)^{1/2}, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_M)$, $y = (y_1, \dots, y_M)$ – позиции БППР в пространстве M стратификационных признаков; x_i, y_i – значения i-го признака для позиций x, y соответственно.

Легко убедиться, что функция ρ, задаваемая формулой (1), действительно удовлетворяет всем свойствам метрики:

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, т.е. расстояние между позициями равно нулю тогда и только тогда, когда эти позиции совпадают;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, т.е. расстояние от позиции x до позиции y такое же, как и от y до x;

3) $\rho(x,y)+\rho(y,x)=\rho(x,z)$, т.е. сумма расстояний между позициями x и y и между y и z не меньше, чем между x и z («неравенство треугольника»).

Таким образом, множество позиций БПР X с введенной на нем метрикой (1) есть метрическое пространство $\langle X,\rho\rangle$ [3].

Поскольку в данном случае в качестве множества X может рассматриваться не только множество позиций, но и непосредственно множество типовых блоков в составе ИЭСППР, то два разных БПР не могут занимать одну и ту же позицию. Исходя из этого, первое свойство не может принять вид $x=y \Rightarrow \rho(x,y)=0$ и, следовательно, информационное пространство не может быть псевдометрическим.

Непрерывное информационное пространство R^M с метрикой (1) есть обычное евклидово пространство. В качестве модели группы БПР в непрерывном информационном пространстве допустимо рассматривать бесконечные последовательности позиций $\{x^{(n)}\}$ (n = 1,2,...). Конечно, в реальности любая группа БПР и ИЭСППР в целом включает лишь конечное число элементов; однако в предельном варианте это число может быть настолько велико по сравнению с отдельным БПР, что его можно считать практически бесконечным. Принятое допущение дает возможность при анализе информационного пространства использовать возможности формального аппарата теории метрических пространств [3].

Позиция x называется пределом последовательности $\{x^{(n)}\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N_ε, что, начиная с номера $n = N_\varepsilon + 1$, для всех членов последовательности $\{x^{(n)}\}$ выполняется условие $\rho(x^{(n)}, x) < \varepsilon$.

Краткая запись сказанного выглядит следующим образом:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N : \forall n > N_\varepsilon \;\; \rho(x^{(n)}, x) < \varepsilon . \quad (2)$$

Это означает, что практически все позиции из последовательности $\{x^{(n)}\}$ (если считать что последовательность бесконечна) удалены от предельной позиции x не более чем на ε.

Открытым шаром радиуса ε с центром в точке x* называется множество позиций

$$S_\varepsilon\left(s^*\right) = \left\{ x \in R^M : \rho(x, x^*) < \varepsilon \right\}. \quad (3)$$

Тогда определение предела можно переформулировать следующим образом: позиция x называется пределом последовательности $\left\{ x^n \right\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε такой, что все члены последовательности, начиная с номера $N_\varepsilon + 1$, принадлежат открытому шару радиуса ε с центром в x.

Легко показать, что любая последовательность позиций не может иметь более одного предела. Последовательности позиций $\left\{ x^n \right\}$ и $\left\{ y^n \right\}$ эквивалентны, если

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists K_\varepsilon \in N : \forall n > K_\varepsilon \;\; \rho(x^{(n)}, y^{(n)}) < \varepsilon . \quad (4)$$

Более слабым по сравнению с определением предела является определение предельной точки: это позиция x такая, что

$$\forall\varepsilon \;\; \forall n^* \;\; \exists n > n^* \;\; N_\varepsilon \;\; \rho(x^{(n)}, x) < \varepsilon . \quad (5)$$

Равносильная геометрическая формулировка: x – предельная точка для последовательности $\left\{ x^n \right\}$ в том и только в том случае, если каждый шар с центром в x содержит бесконечно много членов последовательности $\left\{ x^n \right\}$. Предел является частным случаем предельной точки: например, последовательность $\left\{ x^n \right\} = (-1)^n$ имеет две предельные точки (+1) и (–1), но не имеет предела.

Последовательность $\left\{ x^n \right\}$ (называется фундаментальной, если

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N : \forall n, m > N_\varepsilon \;\; \rho(x^{(n)}, x) < \varepsilon . \quad (6)$$

Иначе говоря, каким бы малым ни было положительное число e, начиная с некоторого номера $N_\varepsilon + 1$, все члены фундаментальной последовательности находятся друг от друга на расстоянии, не превышающем ε.

Множество фундаментальных последовательностей в метрическом пространстве распадается на классы эквивалентности [3]. Это означает, что любые две фундаментальные последовательности, попавшие в один класс, взаимно эквивалентны в смысле (4), а попавшие в разные классы – не эквивалентны. Известно, что метрическое пространство $\left\langle R^M, \rho \right\rangle$ является полным, т.е. каждая фундаментальная последовательность в нем имеет единственный предел. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера $N_\varepsilon + 1$, все элементы множества БПР принадлежат открытому шару радиуса e, центром которого является предел последовательности.

Предел можно трактовать как типичного представителя множества БПР: это позиция такая, что подавляющее большинство остальных позиций из данной общности не слишком удалены от нее. Поскольку близость в информационном пространстве предполагает сходство иерархических рангов, то такая трактовка представляется вполне обоснованной.

Эквивалентные общности БПР образуют «метаобщность». По сути дела, это единая общность, поскольку подавляющее число ее элементов очень близки друг к другу в смысле метрики (1) и имеют одного и того же типичного представителя (общий предел всех эквивалентных фундаментальных последовательностей).

Таким образом, в структуре информационного пространства можно выделить несколько «ядер» метаобщностей с типичными представителями.

Для сравнения одной общности с другой с точки зрения ее однородности можно использовать так называемый диаметр метрического пространства, т.е. величину

$$d(X, \rho) = \max_{x,y \in X} \rho(x, y) . \quad (7)$$

Чем больше величина d, тем выше гетерогенность общности $\left\langle X, \rho \right\rangle$, и наоборот.

Будем говорить, что позиция x близка к группе БПР $G \subset X$, если $\rho\left(x, G\right) = 0$, исходя из того, что расстояние от точки до множества в метрическом пространстве определяется по формуле

$$d(X,\rho)=\inf_{y\in X}\rho(x,y). \qquad (8)$$

Используя метрику (1), можно выделять в структуре ИЭСППР общности БПР с помощью процедур кластеризации, т.е. помещать в один и тот же класс близкие в смысле (1) позиции, а в различные классы – далекие.

Поскольку одним из характерных признаков абсолютного большинства СОТО является наличие иерархической структуры, их управляющие системы в целом, и интеллектуальные компоненты этих систем (ИЭСППР) в частности, организованы в форме иерархии [4]. Указанное обстоятельство определяет необходимость количественного определения в структуре ИЭСППР положения каждого БПР. На практике это означает, что каждый типовой БПР обладает определенным рангом в соответствии со своим положением в иерархии. Одним из наиболее продуктивных подходов к количественному измерению ранга элемента иерархической структуры является анализ положения вершин соответствующего бесконтурного орграфа [5].

Назовем прямым (обратным) иерархическим рангом вершины бесконтурного орграфа номер слоя, к которому она принадлежит на прямом (обратном) расслоении этого орграфа. Обозначим через f(u) прямой, а через b(u) – обратный ранг величины u. Так, в орграфе на рис. 1 имеем f(1) = 1, f(2) = f(5)= = 2, f(3) = f(6) = 3, f(4) = 4, b(1) = 1, b(2) = 2, b(3) = 3, b(4) = b(5) = b(6) = 4. Далее, если f(u) = b(u) = s(u), то величину s(u) назовем двусторонним иерархическим рангом вершины.

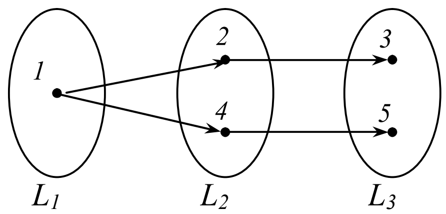

Рис. 1. Каноническое расслоение орграфа

Очевидно, вершина бесконтурного орграфа D обладает двусторонним иерархическим рангом тогда и только тогда, когда она является закрепленной.

Если $\exists s(u)$ и D – последовательный, то

$$s(u)=1+\rho(L_1,u)=m-\rho(u,L_m), \qquad (9)$$

где $\rho(P,u)=\min_{\upsilon\in P}\rho(\upsilon,u)$, $\rho(u,P)=\min_{\upsilon\in P}\rho(u,\upsilon)$, $P\subset Y$; $\rho(u,\upsilon)$ – расстояние (длина кратчайшего пути) от u до υ.

В общем случае плавающим рангом вершины u бесконтурного орграфа D назовем номер слоя в каноническом расслоении канонического подорграфа D, к которому можно отнести и так, чтобы полученное расслоение было упорядоченным. В работе [5] предлагаются следующие меры иерархического ранга вершины u бесконтурного орграфа D:

$$h(u)=\sum_{k=1}^{n-1}kQ_k^u,\quad h'(u)=\sum_{k=1}^{n-1}kQ'^u_k, \qquad (10)$$

где Q_k^u – число вершин D, расстояние (длина кратчайшего пути) от u до которых равно k; Q'^u_k – число вершин D, длина максимального пути от u до которых равна k; n – число вершин D.

Эти меры позволяют учесть при определении ранга БПР количество непосредственно связанных с ним нижележащих элементов, причем в случае меры h дополнительным фактором является длина «иерархического пути» от данного БПР до связанных с ним нижележащих элементов в структуре ИЭСППР.

Для получения более точной характеристики иерархического ранга БПР в ИЭСППР, необходимо учитывать не только количество связанных с ним нижележащих элементов, но и расслоение ИЭСППР по некоторому стратификационному признаку. Используем в качестве меры иерархического ранга БПР с учетом расслоения ИЭСППР функцию

$$G_d^S(u)=\sum_{k=1}^{m}(k-p)\ N_k^u, \qquad (11)$$

где вершина u принадлежит слою L в расслоении S орграфа D; N_k^u – число вершин в слое L_k, достижимых из u; m – число слоев в расслоении S.

Расслоение $S'=\left\langle R,\pi'(m)\right\rangle$ назовем инвертным к расслоению $S=\left\langle R,\pi'(m)\right\rangle$, если $\pi'_i(m)=m-\pi_i(m)+1,\ i=1,\ldots,m.$

Теорема 1. Если все вершины, достижимые из вершины $u\in L_p$, тоже принадлежат L_p, то

$$G^S(u)=0,\ \forall S\in\aleph.$$

Доказательство.

$$\forall k\ \ N_k^u\neq 0\Rightarrow k=p\Rightarrow G^S(u)=0.$$

Из теоремы 1 следует, что если все нижележащие элементы некоторого БПР принадлежат тому же слою принятия решений, что и он сам, то в смысле данной стратификации мера ранга u («первого среди равных») равна нулю. В частности, все вершины в тривиальном расслоении и все вершины без выходных дуг в любом расслоении имеют нулевую меру иерархического ранга.

Теорема 2. Если в упорядоченном расслоении S вершина υ достижима из вершины u, то $G^S(u)>G^S(\upsilon)$.

Доказательство.

Заметим, что для упорядоченных расслоений S формула (11) будет иметь вид

$$G^S(u)=\sum_{k=p+1}^{m}(k-p)\ N_k^u>0, \qquad (12)$$

$$G^S(u)-G^S(\upsilon)=\sum_{k=p+1}^{m}(k-p)N_k^u-\sum_{j=q+1}^{m}(j-q)N_j^\upsilon=$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q}(k-p)N_k^u + \sum_{k=q+1}^{m}(k-p)N_k^{u\setminus\upsilon} + (q-p)\sum_{j=q+1}^{m}N_k^{u,\upsilon}.$$

Здесь первая сумма строго положительна (так как $\upsilon \in L_q$ достижима из u), а вторая и третья неотрицательны. Таким образом, $G^S(u) - G^S(\upsilon) > 0$.

Это утверждение вполне понятно: в упорядоченном расслоении мера ранга выше лежащего БПР должна быть больше меры ранга любого из связанных с ним ниже лежащих элементов.

Теорема 3.

$$G^{S_c}(u) = h^{'}(u),$$

где $h^{'}(u)$ определяется формулой (10).

Доказательство.

Пусть $u \in L_p$. Тогда

$$G^{S_c}(u) = \sum_{k=p+1}^{m}(k-p)N_k(u) = \sum_{k-p=1}^{m-p}(k-p)N_{k-p}(u) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m-p} jN_j(u) = h^{'}(u).$$

Обозначим $B^1(u) = \{\upsilon \in Y : (u,\upsilon) \in Z\}$ – множество нижележащих элементов по отношению к БПР u. Назовем множество вершин $W \subseteq Y(D)(|W| \geq 2)$ в бесконтурном орграфе D:

– неконкурентным, если

$$\forall u,\upsilon \in W : B^1(u) \cap B^1(\upsilon) = \varnothing;$$

– частично конкурентным, если

$$\exists u,\upsilon \in W : B^1(u) \cap B^1(\upsilon) = \varnothing;$$

– полностью конкурентным, если

$$\forall u,\upsilon \in W : B^1(u) = B^1(\upsilon).$$

Расслоение S назовем согласованным с мерой ранга G, если $\forall L_p \in S \quad \forall u,\upsilon \in L_p : G^S(u) = G^s(\upsilon)$.

Следствие 1. Если некоторый слой принятия решений в ИЭСППР является полностью конкурентным множеством, то все его вершины имеют одинаковую меру иерархического ранга.

Следствие 2. Если любой слой принятия решений в ИЭСППР является полностью конкурентным множеством, то расслоение S – согласованное.

Таким образом, иерархический ранг БПР в ИЭСППР представляет собой комплексную многогранную характеристику. Часть ее компонент однозначно определяется положением БПР в структуре ИЭСППР (разумеется, это относится ко всем функциональным подсистемам ИЭСППР, элементом которых является данный БПР). Для учета указанных элементов следует рассматривать конкретный вид стратификации ИЭСППР и порожденные при этом расслоения БПР. Количественную характеристику иерархического ранга БПР в зависимости от конкретного расслоения дает мера (11). С помощью меры иерархического ранга можно определить «расстояние» между БПР и тем самым формализовать структуру ИЭСППР как метрическое пространство.

Выводы

Предложенный математический аппарат описания иерархических структур ИЭСППР СОТО, выделения слоев принятия решений и соответствующих мер иерархического ранга БПР дает основу для количественного оценивания иерархического статуса любого БПР в составе ИЭСППР, а также свойств единого информационного пространства в рамках СОТО как объекта принятия решений.

Список литературы

1. Джексон П. Введение в экспертные системы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 624 с.

2. Шостак И.В., Топал А.С., Устинова А.Н. Проблемы анализа и синтеза холонических систем управления сложными объектами // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 3(28). – С. 66-69.

3. Угольницкий Г.А. Модели социальной иерархии. – М.: «Вузовская книга», 2004. – 88 с.

4. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 200 с.

5. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

Поступила в редколлегию 1.08.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Гамаюн, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков.

МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ В ІЄРАРХІЧНИХ СТРУКТУРАХ УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ ОРГАНІЗАЦІЙНО-ТЕХНІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

І.В. Шостак

Розглянуто метричні властивості інформаційного простору інтегрованих експертних систем підтримки прийняття рішень щодо управління складними організаційно-технічними об'єктами, окремі елементи яких (типові блоки прийняття рішень) інтерпретовано з позицій аналітичної геометрії у вигляді точок дискретного простору.

Ключові слова: *дискретний інформаційний простір, гранична крапка, фундаментальна послідовність, клас еквівалентності, спільність, метаобщность, гетерогенність спільності, кластеризація.*

METRICAL PROPERTIES OF INFORMATION SPACE IN THE HIERARCHICAL STRUCTURES OF COMPLEX ORGANIZATIONAL-TECHNICAL OBJECTS MANAGEMENT

I.V. Shostak

Metrical properties of information space of integrated expert decision-making systems for complex organizational-technical objects management are considered. The separate elements of such systems (typical blocks of decision making) are interpreted in terms of analytical geometry as points of discrete space.

Keywords: *discrete informative space, maximum point, fundamental sequence, class of equivalence, community, methacommunity, heterogeneity of community, clusterization.*