УДК 531/534:001.8

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ДИСКРЕТНИХ МЕХАНІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

В статті розглянуті питання, пов'язані з визначенням оптимального числа ступенів вільності дискретних механічних систем, що становить основу побудови раціональних розрахункових математичних моделей. Стаття присвячена розвитку розглянутих раніше [1] методів побудови дискретних моделей коливальних механічних систем і способів їх дослідження за допомогою диференціальних рівнянь, які в сукупності з початковими умовами руху складають основу математичної моделі механічної системи.

Ключові слова: *дискретні моделі, математична модель.*

Вступ

Будь-який силовий елемент літального апарата, його механізм чи агрегат можна розглядати як сукупність пружних тіл, яка за суттю становить систему з розподіленими масовими та жорсткими параметрами. Для розрахунку такої спрощеної механічної системи, яка відображає основні динамічні характеристики фізичного процесу, треба перш за все визначити її оптимальне число ступенів вільності. У багатьох випадках вивчення руху системи з n ступенями вільності становить досить складну задачу механіки навіть в умовах програмного забезпечення електронної обчислювальної техніки для динамічних розрахунків. Тому мінімізація значення **n** є головним і найбільш важливим етапом у вирішенні цієї проблеми.

В тих випадках, коли маси, що приймаються за абсолютно тверді тіла, і без масові пружні з'єднання виділити важко, отримати найбільш раціональну механічну модель навіть у першому наближенні, як правило, дуже важко. Прикладом може бути балка при поперечних або ступінчатий вал турбіни при крутильних коливаннях.

Якщо головними будуть крутильні коливання, то використовується модель дисків, у якій пружні властивості частин валу зберігаються такими, як і у початкового валу. Момент інерції кожного диску дорівнює моменту інерції одного з ступенів валу, а центр мас його співпадає з центром мас ступені. Ця модель має велику практичну цінність, бо вона часто зустрічається в конструкціях машин. Прикладом може служити вал повітряного або гребного гвинта, на одному кінці якого двигун, на іншому – гвинт [2].

Якщо головними виявляються пружні згинальні коливання, то кожну ступінь можна замінити точечною масою або диском. Інші властивості еквівалентної невагомої балки приймаються співпадаючими із властивостями статично навантаженого валу.

Основна частина

Для вибору числа ступенів вільності часто необхідно користуватися додатковою інформацією, яка може засновуватися як на даних експериментів, так і на результатах розрахунків побудованих моделей. Чим краще вивчені коливання елементів, агрегатів або машин у цілому, тим більша імовірність побудувати оптимальну по числу ступенів вільності модель вже на першому етапі дослідження.

Один з прийомів визначення числа ступенів вільності полягає у наступному: будується схема, яка має явно більше число ступенів вільності, а потім зменшується число ступенів вільностей за рахунок об'єднання мас або за рахунок ліквідації пружних з'єднань за спектральними критеріями. Нагадаємо, що під спектром лінійної системи мається на увазі сукупність її власних частот.

Запишемо рівняння коливань механічної системи з n ступенями вільності у векторному вигляді

$$A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = 0, \qquad (1)$$

де $\overline{q}$ – вектор-стовбець узагальнених координат; A і C – квадратні матриці розмірністю nxn, які називаються відповідно матрицями інерції і жорсткості.

Оскільки очікуваний рух для кожної з узагальнених координат q_n є коливальним, то рішення рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$\overline{q} = \overline{\lambda}\sin\left(kt + \alpha\right). \qquad (2)$$

Диференціюючи вираз (2) і підставляючи в рівняння (1), після скорочення отримаємо систему n-лінійних однорідних рівнянь відносно $\overline{\lambda}$:

$$\left(C - Ak^2\right)\overline{\lambda} = 0. \qquad (3)$$

Власні коливання системи знайдемо із умов рівності нулю визначника цієї системи

$$\left(C - Ak^2\right) = 0. \qquad (4)$$

Останнє рівняння називається рівнянням частот, а визначений для кожного значення $к_s$ з точністю до множника вектор-стовбця λ_s – власною формою коливань.

Можна довести, що для будь-якої консервативної механічної системи, яка здійснює коливання відносно деякого положення статичної рівноваги, усі корені $к_s$ рівняння частот є дійсними. Їх називають власними частотами коливань і розміщують у порядку збільшення $k_1 \le k_2 \le ... \le k_n$.

Значення $к_1$ називається найбільш низькою власною частотою, а значення $к_s\left(S > 2\right)$ – високими частотами. Декілька перших частот (кількість їх визначається у кожному конкретному випадку окремо) називаються низькою, решта – високою частиною спектру. Наприклад, коливання лопатей гвинтів вертольота здійснюються під дією моментів сил Коріоліса і аеродинамічних сил. В загальному випадку вони являють собою сумісні поперечні (згинальні у двох площинах) і крутильні коливання. Як показую практика для розрахунків достатньо визначити частоти першого і другого тонів у площині змаху і двох низьких тонів у площині обертання лопаті гвинта [3].

Для прикладу визначимо власні частоти і власні форми механічної моделі, яка зображена на рис. 1. Маси m_1 і m_2 пов'язані пружними жорсткостями.

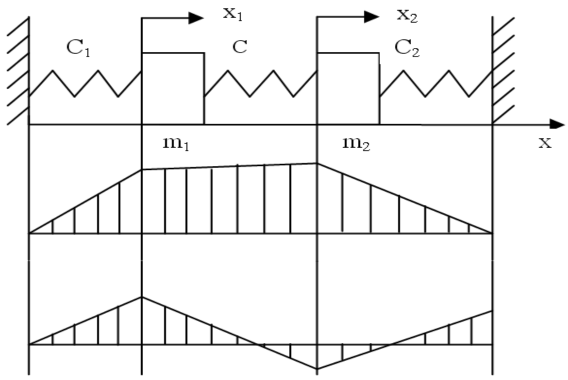

Рис. 1. Графіки форм коливань

Записуючи для кожної маси диференціальні рівняння руху, отримаємо систему рівнянь (1) у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 - c\left(x_1 - x_2\right); \\ m_2\ddot{x}_2 &= c\left(x_1 - x_2\right) - c_2x_2. \end{aligned} \qquad (5)$$

Рішення рівнянь шукаємо у вигляді

$$x_1 = A_1\sin\left(kt + \alpha\right);\; x_2 = A_2\sin\left(kt + \alpha\right). \qquad (6)$$

В результаті систему (3) можна записати таким чином

$$\begin{cases} \left(c_1 + c - m_1k^2\right)\lambda_1 - c\lambda_2 = 0; \\ -c\lambda_1 + \left(c_2 + c - m_2k^2\right)\lambda_2 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Рівняння частот

$$\begin{vmatrix} c_1 + c - m_1 k^2 & -c \\ -c & c_2 + c - m_2 k^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

приводиться до біквадратного рівняння

$$k^4 - k^2\left[\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right] + \frac{c_1}{m_1}\frac{c_2}{m_2} + \frac{c(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} = 0. \quad (9)$$

Форми коливань для будь-якої з власних частот визначаються з рівняння

$$\frac{A_{1s}}{A_{2s}} = \frac{c}{c_1 + c - m_1 k_s^2}, \quad s = 1, 2 \qquad (10)$$

і зображуються графічно, як показано на рис. 1 для випадку $m_1 = m_2$,

$$C_1 = C_2 = C.$$

У багатьох випадках доцільно зменшувати число ступенів вільностей системи за рахунок поєднання мас або ліквідації слабких вібраційних в'язей. Досить часто це робиться на основі фізичних міркувань, які підтверджуються досвідом попередніх розрахунків. Наприклад, визначаючи першу власну частоту розглянутої вище системи, маси m_1 і m_2 можна поєднати, якщо вони мають порівняльні маси і з'єднані достатньо жорсткою пружною ($c >> c_1, c_2$). Якщо одна з мас набагато менша іншої (наприклад, $m_1 << m_2$), то її можна взагалі не враховувати і рахувати $m_1 = 0$. За наявністю пружини малої жорсткості частоти системи практично не відрізняються від частот одномасових систем

$$k_1 = \sqrt{c_1/m_1} \quad \text{та} \quad k_2 = \sqrt{c_2/m_2}.$$

Такі перетворення реальної системи, коли нехтують масами чи жорсткостями пружних елементів, а також замінюють їх нескінченно великими, іноді коректують приєднуванням до мас, що залишилися, частини відкинутих мас. Якщо немає значної різниці у масах і жорсткостях системи, а задача зменшення числа ступенів вільності актуальна, використовуються багато чисельні модифікації парціальних систем. Вони відокремлюються від початкової багатомасової системи відкиданням з'єднань, фіксацією окремих точок системи або частини узагальнених координат і мають невелике число ступенів вільності – від однієї до трьох. Правила отримання системи у кожному окремому випадку аналізуються дослідником. Можливість поєднати чи розділити маси, виключаючи їх із системи визначається порівнянням власних частот парціальних систем між собою, а також з частотами вимушених сил у робочому діапазоні даної системи, що складається з мас m_1 і m_2, з'єднаних пружиною з жорсткістю С, може служити критерієм можливості об'єднати ці маси при визначенні першої власної частоти. Як видно з рівняння частот, при виконанні умови

$$c(m_1 + m_2)/(m_1 m_2) >> \max\{c_1/m_1, c_2/m_2\}$$

перша власна частота близька до значення

$$\sqrt{(c_1 + c_2)/(m_1 + m_2)},$$

а друга – до частоти розглянутої парціальної системи

$$\sqrt{c(m_1 + m_2)/(m_1 m_2)}.$$

З розглянутого видно, що побудова найбільш раціональної розрахункової механічної моделі потребує знання про характер коливань, що вивчаються, і особливості руху системи. В багатьох випадках врахувати усі суттєві ступені вільності можна лише методом послідовних наближень, з притяганням розрахунків подібних схем і результатів експериментів.

Висновок

Таким чином, знаючи власні частоти, можна безпосередньо оцінити досконалість конструкції відносно величин змінних напружень в її елементах. Власні форми разом з власними частотами являють основу розрахунків вільних та вимушених коливань механічних систем, дослідження яких в значній мірі залежить від вибору числа ступенів вільності.

Список літератури

1. Юрченко О.О. Методи побудови дискретних моделей коливальних механічних систем / О.О. Юрченко // Збірник наукових праць ХІЛ ВПС, 1999. – № 1. – С. 42-46.

2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М., 1959. – 349 с.

3. Михеев Р.А. Прочность вертолета / Р.А. Михеев. – М.: Машиностроение, 1984. – 250 с.

Надійшла до редколегії 11.02.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Х.В. Раковський, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О.А. Юрченко

В статье рассмотрены вопросы, связанные с определением оптимального числа степеней вольности дискретных механических систем, которые составляют основу построения рациональных расчетных математических моделей. Статья посвящена развитию рассмотренных ранее методов построения дискретных моделей колебательных механических систем и способов их исследования с помощью дифференциальных уравнений, которые в совокупности с начальными условиями движения составляют основу математической модели механической системы.

Ключевые слова: *дискретные модели, математическая модель.*

TASK OF OPTIMUM CHOICE OF DISCRETE MECHANICAL MODELS

O.A.. Yurchenko

Questions, related to determination of optimum number of degrees of liberty of the discrete mechanical systems which make basis of construction of rational calculation mathematical models, are considered in the article. The article is devoted development of the methods of construction of discrete models of the oscillating mechanical systems and methods of their research considered before by differential equalizations which in an aggregate with the initial conditions of motion make basis of mathematical model of the mechanical system.

Keywords: *discrete models, mathematical model.*