

УДК 530.1.537.86 + 621.396.96

Р.Э. Пашенко¹, Э.И. Пашенко²¹Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков²Житомирский военный институт им. С.П. Королева
Национального авиационного университета, Житомир

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ПОМЕХА НА ВЕЛИЧИНУ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Проведен анализ влияния отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности. Получено эмпирическое выражение для величины поправки фрактальной размерности, обусловленной помехой. Установлено, что на величину фрактальной размерности влияет величина отношения сигнал/помеха. Показано, что уменьшение отношения сигнал/помеха (увеличение среднеквадратического отклонения помехи) приводит к увеличению величины фрактальной размерности аддитивной смеси сигнала и помехи, которая стремится к величине фрактальной размерности чистой помехи.

Ключевые слова: фрактальный анализ, фрактальная размерность, отношение сигнал/помеха.

Постановка проблемы и анализ литературы

В последние два десятилетия стремительно развивается сравнительно молодой метод нелинейной динамики – фрактальный, издано много прекрасных работ по фракталам [1 – 6]. Каждая работа своеобразна по-своему и затрагивает как различные области применения фракталов, так и показывает их красоту. В них также приводится обширная литература по этому научному направлению. В основе фрактального метода нелинейной динамики лежит понятие фрактальной размерности, которая, как правило, является неотрицательным нецелым числом, отражающим, некоторым образом, геометрическую сложность анализируемой структуры (сигнала, изображения и т.д.). Различная сложность подстилающих поверхностей и объектов наблюдения приводит к различным значениям величин фрактальной размерности отраженного сигнала. Данный факт позволяет использовать величину фрактальной размерности для анализа сигналов и изображений. Алгоритмы фрактального анализа достаточно просты и эффективны в реализации.

Таким образом, представляет практический интерес анализ влияния отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности.

Цель статьи: провести анализ влияния отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности.

Определение фрактальной размерности с использованием метода покрытия

Существует много способов расчета размерности, но все они включают в себя подсчет или объема, или площади, или длины фрактальной формы и того, как они изменяются при масштабировании.

Остановимся более подробно на определении размерности Хаусдорфа-Безиковича (фрактальной размерности) с использованием способа покрытия, который будем использовать при анализе влияния отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности.

Способ определения фрактальной размерности с помощью покрытия сигналов квадратами содержит следующие шаги [7].

1. Задается некоторое ϵ , разбивается временная область существования исходных данных на квадраты со стороной ϵ и подсчитывается, сколько квадратов накрывают все известные точки (рис. 1). Получается одно значение $N(\epsilon)$.

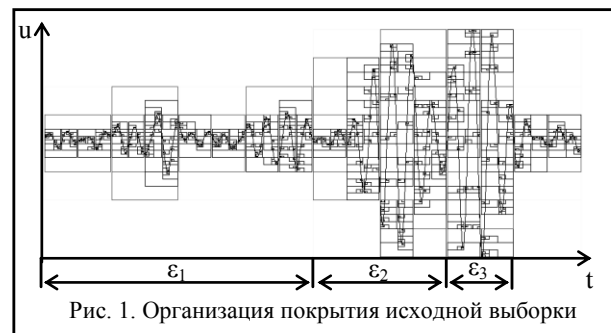


Рис. 1. Организация покрытия исходной выборки

2. Допустим, что были проведены вычисления $N(\epsilon)$ для различных длин стороны ϵ (на рис. 1 это значения ϵ_1 , $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, $\epsilon_3 = \epsilon_1/4$). Как следует из определения ФР [190], при малых ϵ число элементов покрытия $N(\epsilon)$ должно вести себя как $\sim \epsilon^{-D}$, а в таком случае $\log N(\epsilon) = -D \cdot \log \epsilon$. Теперь по полученным данным строится зависимость $\log N(\epsilon)$ от $\log 1/\epsilon$ (рис. 2).

3. Оценивание ФР по полученным данным сводится к поиску “наиболее линейного” участка зависимости $\log N(\epsilon)$ от $\log 1/\epsilon$; построению на этом участке линейной аппроксимации вида $\log N(\epsilon) = -$

$b \cdot \log \epsilon + C$, например, по методу наименьших квадратов (МНК) [8]; в качестве оценки фрактальной размерности берется $D = -b$, т.е. угол наклона прямой МНК.



Рис. 2. Определение размерности Хаусдорфа-Безиковича с использованием метода покрытия

Влияние отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности

Проведем исследование влияния отношения сигнал/помеха на величину ФР при помощи компьютерного эксперимента. В качестве модели полезного сигнала выбиралась модель простого гармонического колебания единичной амплитуды ($U = 1$) и произвольной частоты, количество точек в периоде было выбрано $N = 1024$. Для моделирования случайных величин (помехи) использовалась встроенная функция создания векторов с нормальным законом распределения $\text{norm}(N, m, \sigma)$ системы математических вычислений Mathcad, при этом число генерируемых случайных величин было равно $N = 1024$, математическое ожидание $m = 0$, а среднеквадратическое отклонение (СКО) изменялось от $\sigma = 0,15$ до $\sigma = 1$ с дискретностью $\Delta\sigma = 0,05$. Исследуемая выборка формировалась в результате сложения полезного сигнала и помехи. Отношение сигнал/помеха рассчитывалось как $q = 20 \lg(U/\sigma)$. На рис. 3 показаны моделируемые данные: полезный сигнал (а), помеха с СКО $\sigma = 0,5$ (б), а также аддитивная смесь полезного сигнала и помехи (в).

С помощью специального пакета расширения FracLab 2.0 системы математического моделирования MATLAB были рассчитаны ФР способом покрытия всех моделируемых данных. Полезный сигнал без помехи (см. рис. 3, а) имеет размерность $D = 1,0165$, а чистая помеха (см. рис. 3, б) – $D = 1,5779$. Анализ модельных данных помехи (многократное повторение генерации случайных величин и изменение СКО) показал, что величина ФР меняется в пределах от $D = 1,49$ до $D = 1,6$. Таким образом, полученные значения ФР свидетельствуют о различной степени изрезанности (степени заполнения плоскости) полезного сигнала и помехи.

Дальнейшая обработка заключалась в вычислении ФР аддитивной смеси гармонического сигнала и помехи при разных значениях СКО помехи (разные отношения сигнал/помеха). Результаты расчетов приведены в табл. 1.

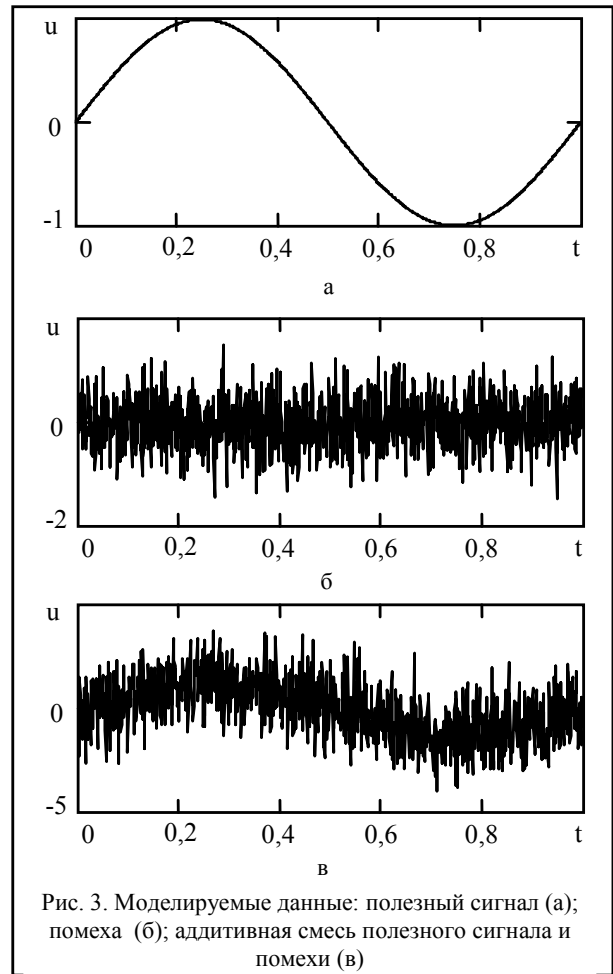


Рис. 3. Моделируемые данные: полезный сигнал (а); помеха (б); аддитивная смесь полезного сигнала и помехи (в)

Таблица 1
Фрактальные размерности при различном отношении сигнал/помеха

ОСП	14 дБ	12 дБ	10 дБ	8 дБ	6 дБ
ФР	1,3549	1,3681	1,4053	1,4581	1,4742
ОСП	4 дБ	2 дБ	1 дБ	0,5 дБ	0 дБ
ФР	1,4885	1,4966	1,5347	1,5449	1,5553

На рис. 4 показана зависимость наклона прямых МНК от величины отношения сигнал/помеха. Нижняя прямая соответствует чистому сигналу, а самая верхняя прямая – помехе. Прямые, располагающиеся между ними, получены для аддитивной смеси сигнала и помехи при различных отношениях сигнал/помеха.



Рис. 4. Зависимость наклона прямых МНК от величины отношения сигнал/помеха

Анализ данных табл. 1 и рис. 4 показывает, что с уменьшением отношения сигнал/помеха (с увеличением СКО помехи) величина ФР (наклон прямой МНК) аддитивной смеси сигнала и помехи возрастает и стремится к величине ФР (наклону прямой МНК) чистой помехи. Пороговое значение отношения сигнал/помеха при котором ФР аддитивной смеси отличается от диапазона изменений ФР помехи ($D = 1,49 \dots 1,6$) составляет 6 дБ.

Аналогично подходу [9], устанавливающему взаимосвязь между корреляционными размерностями в n -мерном $D(n)$ и $(n+1)$ -мерном $D(n+1)$ фазовых пространствах, найдем зависимость изменения ФР, рассчитываемой способом покрытия, при изменении отношения сигнал/помеха $D(\sigma)$. Так как с увеличением СКО фрактальная размерность увеличивается, то логично будет записать зависимость изменения ФР от СКО (ФР аддитивной смеси сигнала и помехи $D(\sigma)$) в следующем виде

$$D(\sigma) = D(s) + \Delta D(\sigma), \quad (1)$$

где $D(s)$ – фрактальная размерность гармонического сигнала; $\Delta D(\sigma)$ – поправка ФР, обусловленная воздействием помехи с СКО σ .

Путем аппроксимации разности ФР аддитивной смеси и чистого сигнала ($D(\sigma) - D(s)$), полученных с использованием компьютерного эксперимента, была найдена закономерность изменения поправки ФР, обусловленной воздействием помехи $\Delta D(\sigma)$. Выражение для величины поправки ФР, обусловленной помехой, имеет вид

$$\Delta D(\sigma) = \frac{r \exp \left[-\left(\frac{r}{2\sigma} \right)^2 \right]}{2\sigma \sqrt{\pi} \Phi \left(\frac{r}{2\sigma} \right)}, \quad (2)$$

где r – нормировочный коэффициент амплитуды сигнала; σ – уровень помехи (среднеквадратическое отклонение); $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp -t^2/2 dt$ – интеграл ошибок.

На рис. 5 показаны экспериментальная (сплошная линия) и расчетная (пунктирная линия) зависимости поправки ФР от СКО помехи.



Рис. 5. Экспериментальная и расчетная зависимость поправки ФР от СКО помехи

Экспериментальная зависимость построена с использованием данных табл. 1, а расчетная по формуле (2), при этом СКО изменялось с дискретностью $\Delta\sigma = 0,05$, и нормировочный коэффициент амплитуды был равен $r = 0,286$. Из хода кривых на рис. 5 видно, что найденная зависимость поправки ФР (выражение (2)) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные, особенно в диапазоне изменения СКО помехи от $\sigma = 0,45$ до $\sigma = 0,75$, что соответствует отношению сигнал/помеха от $q = 6$ дБ до $q = 2,5$ дБ.

На рис. 6 показана зависимость ошибки аппроксимации экспериментальных данных с помощью выражения (2) от величины СКО помехи $DD(\sigma) = \Delta D_{\text{экс}}(\sigma) - \Delta D_{\text{расч}}(\sigma)$.

Анализ данных показывает, что ошибка аппроксимации не превышает $DD = 0,05$, а в диапазоне изменения СКО помехи от $\sigma = 0,45$ до $\sigma = 0,75$ не больше $DD = 0,025$.

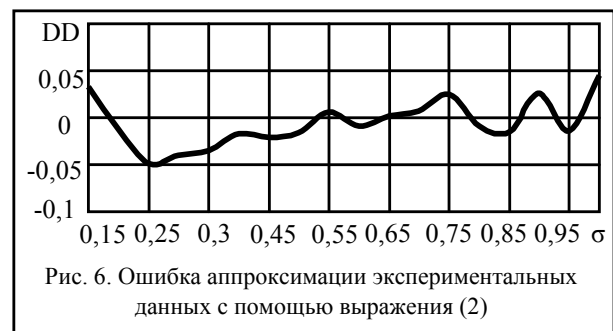


Рис. 6. Ошибка аппроксимации экспериментальных данных с помощью выражения (2)

Таким образом, на величину фрактальной размерности влияет величина отношения сигнал/помеха.

Выводы

1. На величину фрактальной размерности влияет величина отношения сигнал/помеха. Уменьшение отношения сигнал/помеха (увеличение СКО помехи) приводит к увеличению величины фрактальной размерности аддитивной смеси сигнала и помехи и стремится к величине ФР чистой помехи.
2. Фрактальная размерность аддитивной смеси практически не отличается от ФР чистой помехи при отношении сигнал/помеха меньше 6 дБ.
3. При проведении дальнейших исследований целесообразно оценить влияние отношения сигнал/помеха на фрактальную размерность высокочастотных сигналов.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. Barnsley M. *Fractals Everywhere* / M. Barnsley. – Boston: Academic Press, 1988. – 394 p.
3. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

4. Пайтген Х.-О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – 176 с.

5. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 528 с.

6. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов: Коллективная монография / Г.Н. Доля, В.К. Иванов, Р.Э. Пащенко, А.М. Стадник и др.; под ред. Р.Э. Пащенко. – Х.: ХООО “НЭО “ЭкоПерспектива”, 2006. – 348 с.

7. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 360 с.

8. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул / Е.Н. Львовский. – М.: Высшая школа, 1988. – 239 с.

9. Schreiber T. Noise in chaotic data: Diagnosis and treatment / T. Schreiber, H. Kantz // Chaos. – 1995. – № 5. – P. 133-142.

Поступила в редколлегию 4.08.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Полярус, Харьковский национальный автомобильный университет, Харьков.

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ВІДНОШЕННЯ СИГНАЛ/ЗАВАДА НА ВЕЛИЧИНУ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ

Р.Е. Пащенко, Е.І. Пащенко

Проведено аналіз впливу відношення сигнал/завада на величину фрактальної розмірності. Отримано емпіричний вираз для величини поправки фрактальної розмірності, яка обумовлена завадою. Встановлено, що на величину фрактальної розмірності впливає величина відношення сигнал/завада. Показано, що зменшення відношення сигнал/завада (збільшення середньоквадратичного відхилення завади) приводить до збільшення величини фрактальної розмірності адитивної суміші сигналу і завади, яка наближається до величини фрактальної розмірності чистої завади.

Ключові слова: фрактальний аналіз, фрактальна розмірність, відношення сигнал/завада.

ANALYSIS INFLUENCING OF RELATION SIGNAL/HINDRANCE ON SIZE TO FRACTAL DIMENSION

R.E. Paschenko, E.I. Paschenko

The analysis influencing of relation is conducted signal/hindrance on the size of fractal dimension. Empiric expression is got for the size of amendment of fractal dimension, by the conditioned hindrance. It is set that on the size of fractal dimension the size of relation influences signal/hindrance. It is shown that a signal/hindrance brings diminishing over of relation to multiplying the size of fractal dimension additive mixture signal and hindrance, which aspires to the size of fractal dimension clean hindrance.

Keywords: fractal analysis, fractal dimension, a relation is a signal/hindrance.