УДК 681.3 : 621.39

В.В. Косенко[1], Н.Д. Бережная[2], Ю.В. Горишная[2]

[1]*Харьковский НИИ технологий машиностроения, Харьков*
[2]*Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Харьков*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ТРАНЗАКЦИЙ В МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЯХ

Рассмотрен подход к исследованию поведения потоков запросов транзакций в среде мультисервисной сети, длительность обслуживания которых распределена по экспоненциальному закону. Получено выражение для распределения транзакций при наличии ряда существенных ограничений как на архитектуру сети, так и на процесс функционирования в ее среде транзакций (замкнутость, однородность, бесприоритетная дисциплина обслуживания, а также длительность обслуживания транзакции в среде ЛК, к которой был сделан запрос).

Ключевые слова: *транзакция, мультисервисная сеть, замкнутость, однородность.*

Введение

Постановка задачи и анализ литературы. При проектировании структуры мультисервисной сети (МСС) для выбора конфигурации ее локальных компонент (ЛК) необходимо знать распределение загрузки ЛК в процессе функционирования МСС [1 – 3]. Распределение загрузки для различных конфигураций МСС при ряде ограничений рассмотрено в [4 – 8].

В данной статье рассмотрена однородная МСС, состоящая из M ЛК, причем каждая i-ая ЛК состоит из l_i однотипных ПЭВМ ($i=\overline{1,M}$). В среде МСС в замкнутом режиме предполагается функционирование N статистически однородных транзакций, обслуживаемых согласно стандартной дисциплине FCFS (First Come First Served). Предполагается, что длительность обслуживания транзакции i-й ЛК распределена по экспоненциальному закону с параметром, равным интенсивности обслуживания μ_i, т.е.

$$F_i(t)=1-e^{-\mu_i t}. \qquad (1)$$

Целью статьи является получение аналитического выражения для распределения транзакций при наличии вышепринятых ограничений как на архитектуру сети, так и на процесс функционирования в ее среде транзакций.

Результаты исследований

Пусть $n_i(t)$ – число транзакций, находящихся в очереди на обслуживание и на обслуживании i-й ЛК в момент времени t. Можно рассмотреть вектор состояния исследуемой сети $\overline{n}=(n_i)_M$, $n_i \le N$, $i=\overline{1,M}$.

Обозначим вероятность того, что МСС находится в состоянии $\overline{n}$ в момент времени t как

$$Đ(\overline{n},t)=P\{n_i(t)=n_i\};\ i=\overline{1,M}.$$

Тогда на множестве состояний МСС

$$S(N,M)=\left\{\overline{n}\middle|\sum n_i=N\right\} \qquad (2)$$

можно ввести многомерный случайный процесс

$$\overline{X}_t=\left(n_i(t)\right)_M;\ i=\overline{1,M}. \qquad (3)$$

Введем $Q=\{\overline{\alpha}\}_{M+N-1}$ – множество двоичных векторов размерности M + N - 1, у которых N координат принимают единичные значения. Для определения числа состояний МСС (card $\overline{X}_t$) на множестве S(N, M) введем биективное отображение ψ: S(N, M) $\to$ Q таким образом, что любая нулевая координата вектора $\overline{\alpha}\in Q$ является разделителем классов целочисленных координат $\overline{n}$, а единичная – кодом обслуживаемой транзакции. При этом, очевидно, что card $Q=C_{N+M-1}^{M-1}$, а значит, вследствие биективности введенного отображения ψ card $S(N,M)=$ card $Q=C_{N+M-1}^{M-1}$.

Определим число транзакций, находящихся на обслуживании в i-й ЛК в момент времени t, как $\eta_i(n_i(t))$. Так как i-ая ЛК одновременно может обслуживать не более l_i транзакций, то

$$\eta_i(n_i(t)) = \min(l_i, n_i(t)).$$

Учитывая то, что на i-й ЛК интенсивность обслуживания равна μ_i, можно рассчитать суммарную плотность потока событий, переводящих систему из фиксированного состояния $\overline{n}\in S(N,M)$ в момент времени t, как

$$\lambda_{\overline{n}}^{(out)}=\sum_{i=1}^{M}\eta_i\left(n_i(t)\right)\cdot\mu_i. \qquad (4)$$

Аналогично, плотность потока событий, переводящих систему в фиксированное состояние $\overline{n}$ в момент времени t при завершении обслуживания транзакции на i-й ЛК и приеме на обслуживание транзакции на j-й ЛК, рассчитывается как

$$\lambda_{\overline{n},i,j}^{(in)}=\eta_j\left(n_j(t)+1\right)\cdot\mu_j\cdot p_{ji}, \qquad (5)$$

где p_{ji} – элемент маршрутной матрицы МСС.

Так как случайный процесс (3) на множестве состояний (2), исходя из (1), является марковским, то, учитывая (4) и (5), можно составить систему прямых уравнений Чепмена-Колмогорова [3]

$$\frac{dP(\bar{n},t)}{dt} = -\lambda_{\bar{n}}^{(out)} \cdot P(\bar{n},t) + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\lambda_{\bar{n},i,j}^{(in)} \cdot P(\bar{n}-\bar{e}_j+\bar{e}_i,t), \quad (6)$$

где $\bar{e}_i$ – единичный вектор направления i.

Рассмотрим поведение полученной системы уравнений (6) в стационарном предельном режиме, который существует вследствие предположения о замкнутости МСС [4]. Обозначив $P(\bar{n}) = \lim\limits_{t\to\infty} P(\bar{n},t)$, получим следующую систему линейных разностных уравнений

$$\lambda_{\bar{n}}^{(out)} P(\bar{n}) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\lambda_{\bar{n},i,j}^{(in)} \cdot P(\bar{n}-\bar{e}_j+\bar{e}_i), \quad (7)$$

которая описывает глобальный баланс МСС [5]: скорость переходов из состояния $\bar{n}$ равна скорости переходов в это же состояние. Для нахождения решения (7) введем для каждой i-й ЛК рекурсивную функцию $\varphi_i : (\overline{0,N}) \to N$, вычисляющую число вариантов обслуживания транзакций, требующих данных, которые размещены на ЛК с номером j:

$$\varphi_i(0) = 1;\ \varphi_i(j) = \eta_i(j)\cdot\varphi_i(j-1), \quad j \in \overline{1,N}.$$

Введем в (7) новую векторную переменную $R(\bar{n})$ таким образом, что

$$т(\bar{n}) = \prod_{k=1}^{M}\varphi_k^{-1}(n_k)\cdot R(\bar{n}). \quad (8)$$

Тогда

$$\lambda_{\bar{n}}^{(out)} \cdot R(\bar{n}) \Big/ \prod_{k=1}^{M}\varphi_k(n_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\lambda_{\bar{n},i,j}^{(in)} \cdot \frac{R(\bar{n}-\bar{e}_i+\bar{e}_j)\cdot\varphi_j(n_i+1)}{\left(\prod\limits_{k=1(k\neq i,j)}^{M}\varphi_k(n_k)\right)\cdot\varphi_i(n_i-1)}.$$

После последовательной подстановки в полученное уравнение выражений (4) и (5) и несложных преобразований получаем

$$\sum_{i=1}^{M}\eta_i(n_i)\cdot\mu_i\cdot R(\bar{n}) =$$
$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\eta_i(n_i)\cdot\mu_j P_{ji} R(\bar{n}-\bar{e}_i+\bar{e}_j). \quad (9)$$

Для векторной переменной $R(\bar{n})$ возможно представление в виде произведения константы и M неизвестных параметров Z_i [4]. Поэтому

$$R(\bar{n}) = r_M(N)\cdot\prod_{i=1}^{M} Z_i, \quad (10)$$

где $r_M(N)$ – константа, определенная для заданного числа транзакций на известной архитектуре ЛК.

Подставив (10) в (9) и произведя соответствующие сокращения, получим

$$\sum_{i=1}^{M}\eta_i(n_i)\left(\mu_i - \sum_{j=1}^{M}\mu_j P_{ji}\cdot\frac{Z_j}{Z_i}\right) = 0. \quad (11)$$

Для $S^N(N, M)$ множества состояний (2)

$$S(N,M) \subset S^N(N,M)$$

выражение (11) эквивалентно

$$\mu_i Z_i = \sum_{j=1}^{M}\mu_j Z_j P_{ji}, \quad (12)$$

так как в данном частном граничном случае вся обработка транзакций сосредоточена только в одном конкретном узле.

Ввод в (12) коэффициентов передачи $\omega_k = \mu_k Z_k$ приводит к системе уравнений

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{M}\omega_j P_{ij};\ i=\overline{1,M},$$

из которой определяются коэффициенты передачи и, соответственно, неизвестные параметры Z_i разложения (10). Это позволяет, исходя из (8), определить стационарное распределение вероятностей для случайного процесса (5) при $t \to \infty$

$$P(\bar{n}) = \frac{R(\bar{n})}{\prod\limits_{k=1}^{M}\varphi_k(n_k)} = r_M(N)\cdot\prod_{k=1}^{M}\frac{Z_k^{n_k}}{\varphi_k(n_k)}.$$

Из условия замкнутости и стационарности рассматриваемого процесса (3) следует, что $\sum\limits_{\bar{n}\in S(N,M)} P(\bar{n}) = 1$, где $\bar{n}$ пробегает все возможные C_{N+M-1}^{M-1} значений на множестве состояний (2). Это позволяет определить константу $r_M(N)$:

$$\sum_{\bar{n}\in S(N,M)} r_M(N)\cdot\prod_{k=1}^{M}\frac{Z_k^{nk}}{\varphi_k(n_k)} = 1;$$

$$r_M(N) = \left(\sum_{\bar{n}\in S(N,M)}\prod_{k=1}^{M}\frac{Z_k^{nk}}{\varphi_k(n_k)}\right)^{-1}.$$

Тогда окончательно распределение вероятностей по C_{N-1}^{M+N-1} состояниям рассматриваемого процесса определяется как

$$P(\bar{n}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} Z_k^{n_k}\varphi_k^{-1}(n_k)}{\sum\limits_{\bar{n}\in S(N,M)}\prod\limits_{k=1}^{M} Z_k^{n_k}\varphi_k^{-1}(n_k)}; \quad Z_k = \frac{\omega_k}{\mu_k}. \quad (13)$$

Для определения вероятности того, что в стационарном режиме i-ая ЛК должна будет обработать не менее чем N_i транзакций, воспользуемся выведенным выражением (13), т.е.

$$P(n_i \geq N_i) =$$
$$= \frac{1}{r_M(N)}\cdot\sum_{\substack{\bar{n}\in S(N,M)\\ n_i\geq N_i}}\prod_{k=1}^{M}\frac{Z_k^{n_k}}{\varphi_k(n_k)} =$$
$$= \frac{Z_i^{N_k}}{\varphi_i(n_i) r_M(N)} \times$$
$$\times \sum_{\bar{n}\in S(N-N_i,M)}\prod_{k=1}^{M}\frac{Z_k^{n_k}}{\varphi_k(n_k)} = \frac{Z_i^{N_i} r_M(N-N_i)}{\varphi_i(n_i)\cdot r_M(N)}.$$

Тогда распределение числа транзакций, находящихся на обработке в i-й ЛК, определяется вероятностью

$$P_i(N_i) = P(n_i \ge N_i) - P(n_i \ge N_i + 1) = \frac{Z_i^{N_i}}{r_M(N)\cdot\varphi_i(n_i)}\times$$
$$\times\left(r_M(N-N_i) - \frac{Z_i}{\eta_{i+1}(\eta_{i+1})}\cdot r_M(N-N_{i-1})\right). \quad (14)$$

Выводы

В результате получено выражение для распределения транзакций (14) в среде МСС. Однако оно выведено при наличии ряда ограничений как на архитектуру АВС, так и на процесс функционирования в ее среде транзакций (замкнутость, однородность, бесприоритетная дисциплина обслуживания, длительность обслуживания транзакции в среде ЛК, к которой был сделан запрос, распределена по экспоненциальному закону).

Однако, именно в данном случае, вероятности стационарного распределения имеют мультипликативную форму [3], что позволяет использовать полученные результаты при анализе распределения транзакций в вычислительных сетях с менее жесткими ограничениями, что и является **направлением дальнейших исследований**.

Список литературы

1. Основи інформаційних систем / Під ред. В.Ф. Ситника. – К: КНЕУ, 2001. – 420 с.

2. Кучук Г.А. Управление ресурсами инфотелекоммунаций / Г.А. Кучук, Р.П. Гахов, А.А. Пашнев. – М.: Физматлит, 2006. – 218 с.

3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

4. Кучук Г.А. Метод дослідження фрактального мережного трафіка / Г.А .Кучук // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 5 (45), – С. 74-84.

5. Кучук Г.А. Моделювання трафіка мультисервісної розподіленої телекомунікаційної мережі / Г.А .Кучук, І.Г. Кіріллов, А.А .Пашнєв // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2006.– Вип. 9 (58). – С. 50-59.

6. Кучук Г.А. Моделирование трафика изолированного пульсирующего источника / Г.А .Кучук // Системи обробки інформації.– Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 1. – С. 168-173.

7. Янбых Г.Ф. Оптимизация информационно-вычислительных сетей / Г.Ф. Янбых, Б.А. Столяров. – М.: Радио и связь, 1987. – 232 с.

8. Chandy K.M., Martin I. Characterization of product form Queueing Networks // I. ACM. – 1983. – Vol. 30, №2. – P. 286-299.

Поступила в редколлегию 10.07.2009

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.К. Иванов, Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Харьков.

РОЗПОДІЛ ОДНОРІДНИХ ТРАНЗАКЦІЙ В МУЛЬТИСЕРВІСНИХ МЕРЕЖАХ

В.В. Косенко, Н.Д. Бережна, Ю.В. Горішна

Розглянутий підхід до дослідження поведінки потоків запитів транзакцій в середовищі мультисервісної мережі, тривалість обслуговування яких розподілена за експоненціальним законом. Отриманий вираз для розподілу транзакцій за наявності ряду істотних обмежень як на архітектуру мережі, так і на процес функціонування в її середовищі транзакцій (замкнутість, однорідність, безпріоритетна дисципліна обслуговування, а також тривалість обслуговування транзакції в середовищі ЛК, до якого був зроблений запит).

***Ключові слова:** транзакція, мультисервісна мережа, замкнутість, однорідність.*

DISTRIBUTING OF HOMOGENEOUS TRANSACTIONS IS IN MULTISERVICE NETWORKS

V.V. Kosenko, N.D. Beregnaya, Yu.V. Gorishnaya

Going is considered near research of conduct of streams of queries of transactions in the environment of multiservice network, duration of maintenance of which is up-diffused on an exponential law. Expression for distributing of transactions is got at presence of row of substantial limitations both on architecture of network and on the process of functioning in its environment of transactions (reserve, homogeneity, without priority discipline of service, and also duration of maintenance of transaction, is in the environment of LK, which a query was done to).

***Keywords:** transactions, multiservice network, reserve, homogeneity.*