

УДК 519.2

Т.В. Редькина<sup>1</sup>, Г.А. Лушникова<sup>2</sup><sup>1</sup> Ставропольский государственный университет, Ставрополь<sup>2</sup> Филиал ГОУ ВПО «Московский государственный университет приборостроения и информатики», Ставрополь

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*В статье рассмотрено построение преобразования Бэклунда для солитонного уравнения, полученного в [1].*

**Ключевые слова:** нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, солитонные уравнения.

Рассмотрим разработанный Клерэном метод построения преобразований Бэклунда как общего вида, так и для уравнения

$$\tilde{z}_{\xi\eta} = B_1 \frac{\partial}{\partial \xi} e^{\tilde{z}} + B_2 \frac{\partial}{\partial \eta} e^{\tilde{z}}. \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения второго порядка (1) относятся к виду, часто называемому уравнениями Монжа – Ампера

$$f_1 \xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta \ z_{\xi\xi} + f_2 \xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta \ z_{\xi\eta} + f_3 \xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta \ z_{\eta\eta} + f_4 \xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta = 0. \quad (1a)$$

Преобразование Бэклунда, связывающее два таких уравнения второго порядка для функций  $\tilde{z}$  и

$z$ , задается парой диф. уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = F_1 \left( z, \tilde{z}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \eta} \right), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = F_2 \left( z, \tilde{z}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \eta} \right). \quad (2b)$$

Для задания явного вида преобразования необходимо найти функции  $F_1$  и  $F_2$ . Условие совместности 2а, 2б (равенство смешанных вторых производных) требует, чтобы функции (2) удовлетворяли соотношению

$$\Omega \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3)$$

Продифференцировав 2а, 2б по  $\eta$ ,  $\xi$  соответственно, получим условие совместности в виде

$$\left(-\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\xi}\right)\tilde{z}_{\xi\xi} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\eta}\right)\tilde{z}_{\xi\eta} + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta}\tilde{z}_{\eta\eta} - \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\xi + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta + F_2\frac{\partial F_1}{\partial z} - F_1\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Функцию  $\tilde{z}$  считаем удовлетворяющей уравнению (1). Тогда, пока хотя бы один из коэффициентов

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\xi} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\eta}\right)$$

не равен нулю, уравнение (5) является дифференциальным уравнением в частных производных для функции  $\tilde{z}$  и содержит полный набор вторых производных  $\tilde{z}_{\eta\eta}$ ,  $\tilde{z}_{\xi\xi}$ ,  $\tilde{z}_{\xi\eta}$ .

Предположим

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\xi} = 0. \quad (6)$$

Равенство (5) после подстановки (6) и (1) примет вид

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi} - \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\eta}\right)\left(B_1\frac{\partial}{\partial \xi}e^{\tilde{z}} + B_2\frac{\partial}{\partial \eta}e^{\tilde{z}}\right) - \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\xi + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta + F_2\frac{\partial F_1}{\partial z} - F_1\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Определим, какова должна быть зависимость функций  $F_1$ ,  $F_2$  от  $\tilde{z}_\eta$ ,  $\tilde{z}_\xi$ .

Для этого продифференцируем (2а) по  $\eta$ , учитывая, что  $\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta}\tilde{z}_{\eta\eta} = 0$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial F_1}{\partial z}F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi}\left(B_1\frac{\partial}{\partial \xi}e^{\tilde{z}} + B_2\frac{\partial}{\partial \eta}e^{\tilde{z}}\right) = R(z, z_\xi, z_\eta). \quad (8)$$

Продифференцировав (8) по  $\tilde{z}_\eta$  дважды, получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{z}_\eta^2} = 0.$$

Проделав аналогичную работу для равенства (2б), но дифференцируя сначала по  $\xi$  и дважды по  $\tilde{z}_\xi$ , получим

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{z}_\xi^2} = 0.$$

Предположим  $\frac{\partial F_2}{\partial z} \neq 0$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial z} \neq 0$ . Следовательно, функции  $F_1$ ,  $F_2$  имеют линейный вид относи-

тельно  $\tilde{z}_\eta$  и  $\tilde{z}_\xi$  соответственно, тогда (2а, б) можно переписать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = f_1(z, \tilde{z}) + p_1(z, \tilde{z})\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi}, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = f_2(z, \tilde{z}) + p_2(z, \tilde{z})\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \eta}, \quad (9б)$$

$f_1, f_2, p_1, p_2$  – пока произвольные функции, которые будут уточняться в дальнейшем рассуждении.

Вернемся к условию совместности (7) с новым видом функций  $F_1$  и  $F_2$  (9):

$$(p_1 - p_2)B_1e^{\tilde{z}}\tilde{z}_\xi + B_2e^{\tilde{z}}\tilde{z}_\eta - \frac{\partial(f_2 + p_2\tilde{z}_\eta)}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\xi + \frac{\partial(f_1 + p_1\tilde{z}_\xi)}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta + (f_2 + p_2\tilde{z}_\eta)\frac{\partial(f_1 + p_1\tilde{z}_\xi)}{\partial z} - (f_1 + p_1\tilde{z}_\xi)\frac{\partial(f_2 + p_2\tilde{z}_\eta)}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Уточним вид  $p_1$  и  $p_2$ , для этого продифференцируем выражение по  $\tilde{z}_\eta$ , а затем по  $\tilde{z}_\xi$ :

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tilde{z}} + p_2\frac{\partial p_1}{\partial z} = p_1\frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial \tilde{z}}. \quad (11)$$

В результате получено уравнение в частных производных, содержащее только функции  $p_1$  и  $p_2$ . Очевидно, что его решение может быть выбрано неоднозначно. Выберем  $p_1$  и  $p_2$  так, чтобы

$$p_1 - p_2 = \varphi(z), \quad \frac{p_1}{p_2} = \psi(\tilde{z}),$$

тогда

$$p_1 = \frac{\varphi(z)\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z}) - 1}, \quad p_2 = \frac{\varphi(z)}{\psi(\tilde{z}) - 1},$$

при этом равенство (11) выполняется тождественно.

Выполним подстановку полученных элементов  $p_1$  и  $p_2$  в равенство (10) и сгруппируем элементы с  $\tilde{z}_\eta$  и  $\tilde{z}_\xi$ , получим:

$$\left(\varphi(z)B_1e^{\tilde{z}} + f_2\frac{\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \frac{\varphi(z)\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\tilde{z}_\xi + \left(\varphi(z)B_2e^{\tilde{z}} + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{z}} + \frac{\varphi(z)}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1\frac{1}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\right)\tilde{z}_\eta + \left(f_2\frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что равенство (12) распадается на систему

$$\begin{cases} \varphi(z)B_1e^{\tilde{z}} - \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{z}} + f_2\frac{\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \frac{\varphi(z)\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0; \\ \varphi(z)B_2e^{\tilde{z}} + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{z}} + \frac{\varphi(z)}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1\frac{1}{\psi(\tilde{z}) - 1}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = 0; \\ f_2\frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Третье уравнение системы дает  $\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{f_1}{f_2} = 0$ ,

его решение определим в виде  $f_1 = \psi_1(\tilde{z})g(z)$ ,  $f_2 = \psi_2(\tilde{z})g(z)$ . Выберем самый простой вид функции  $g(z)$ . Пусть  $g(z) = z$ , тогда

$$\begin{aligned} f_1 &= \psi_1(\tilde{z})z; \\ f_2 &= \psi_2(\tilde{z})z. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив найденные выражения в систему (13) и решив ее относительно  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получим:

$$\psi_1 = -B_2 e^{\tilde{z}} + C_2,$$

$$\psi_2 = B_1 e^{\tilde{z}} + C_1,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} f_1 &= -B_2 e^{\tilde{z}} + C_2 z, \\ f_2 &= B_1 e^{\tilde{z}} + C_1 z. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь преобразования (9) с учетом (15) и (11), и связь между  $z$  и  $\tilde{z}$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= -B_2 e^{\tilde{z}} + C_2 z + \frac{z\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z})-1} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= B_1 e^{\tilde{z}} + C_1 z + \frac{z}{\psi(\tilde{z})-1} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Как видно, таких преобразований существует бесконечно много, т.к. функция  $\psi(\tilde{z})$  осталась неопределенной. Придадим функции значение  $\psi(\tilde{z}) = 2$ , чтобы получить самый простой вид преобразований, а постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  положим равными нулю, тогда равенства (16) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= -B_2 e^{\tilde{z}} z + 2z \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= B_1 e^{\tilde{z}} z + z \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, дифференцируя первое равенство по  $\xi$ , а второе – по  $\eta$  и вычитая из первого второе, получим исходное уравнение (1).

Посмотрим, к какому уравнению сведется уравнение (1) при заданном преобразовании Беклунда вида (17). Для этого необходимо в системе (16) избавиться от  $\tilde{z}$  и ее производных. Разделим обе части равенства (16) на  $e^{\tilde{z}}$ :

## ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТКОВИХ ПОХІДНИХ

Т.В. Редькіна, Г.О. Лушнікова

*У статті розглянута побудова перетворення Беклунда для солітонного рівняння, отриманого в [1].*

**Ключові слова:** нелінійні диференціальні рівняння в часткових похідних, солітонні рівняння.

## BEKLUND'S TRANSFORMATION FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATION IN PRIVATE DERIVATIVES

T.V. Redkina, G.A. Lushnikova

*In the article the construction of Beklund's transformation is considered for soliton equalization, got in [1].*

**Keywords:** nonlinear differential equalizations are in private derivatives, soliton equalizations.

$$\begin{cases} e^{-\tilde{z}} z_\xi - 2z\tilde{z}_\xi e^{-\tilde{z}} = -B_2 z; \\ e^{-\tilde{z}} z_\eta - z\tilde{z}_\eta e^{-\tilde{z}} = B_1 z. \end{cases} \quad (18)$$

Очевидно, что во втором равенстве системы (18) можно выделить полную производную по  $\eta$ , и аналогичную структуру можно выделить в первом уравнении.

$$\begin{cases} \frac{\partial(z e^{-\tilde{z}})}{\partial \xi} - z\tilde{z}_\xi e^{-\tilde{z}} = -B_2 z; \\ \frac{\partial(z e^{-\tilde{z}})}{\partial \eta} = B_1 z. \end{cases} \quad (19)$$

Чтобы выразить  $\tilde{z}$  из полученной системы, введем замену  $z = w_\eta$ , позволяющую проинтегрировать второе равенство:

$$z e^{-\tilde{z}} = B_1 w, \text{ или } \tilde{z} = \ln \left( \frac{w_\eta}{B_1 w} \right).$$

После подстановки полученных элементов в первое уравнение системы, получим равенство, не зависящее от  $\tilde{z}$ :

$$2B_1 w_\xi w_\eta - B_1 w_{\eta\xi} w + B_2 w_\eta^2 = 0. \quad (20)$$

Итак, доказана следующая

### Теорема:

Уравнение (1) с помощью преобразования Беклунда вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= -B_2 e^{\tilde{z}} z + 2z \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= B_1 e^{\tilde{z}} z + z \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

переходит в равенство

$$2B_1 w_\xi w_\eta - B_1 w_{\eta\xi} w + B_2 w_\eta^2 = 0.$$

## Список литературы

1. Редькіна Т.В., Карюк А.И., Лушнікова Г.А. Нелінійні рівняння в частних похідних, існуючі операторну структуру ізоспектральної деформації // Т.В. Редькіна, А.И. Карюк, Г.А. Лушнікова // Системи обробки інформації. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил, 2008. – Вып. 2(69). – С. 18-28.

Поступила в редколлегию 28.08.2009

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.