УДК 519.7

А.А. Бут, А.И. Пресняков, В.В. Шляхов

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ИЗОМОРФИЗМ МОДЕЛЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ДИФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ ПРИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассматриваются две модели компараторной идентификации, модель эквивалентности и модель дифункциональности. Доказано, что идентифицируемый оператор может обладать свойством внутренней нелинейности взаимно однозначного характера. Показано, что расширение моделей на случай операторов от двух аргументов, приводит к отсутствию изоморфизма.

Ключевые слова: *предикат**,** модель эквивалентности, модель дифункциональности, компараторная идентификация, изоморфизм моделей.*

Введение

Традиционная постановка задачи идентификации неизвестного объекта выглядит следующим образом [1]: по данным наблюдения за входом и выходом объекта необходимо построить оптимальную в некотором смысле модель. Для построения математической модели необходимы следующие ее составные части: математическое описание множества входных и выходных сигналов; знание общей структуры оператора, определяющего общий вид модели; оценка или идентификация его параметров. Одним из методов, позволяющих решать весь комплекс поставленных вопросов, есть метод компараторной идентификации [2].

При компараторной идентификации используются две модели компаратора.

В первой сравниваются сигналы, преобразованные по одному и тому же закону, то есть реализуется модель эквивалентности

$$E(x, y) = D_B(Fx, Fy),$$

где $x, y \in A$ – множество входных сигналов; $Fx, Fy \in B$ – множество выходных сигналов; F – отображение из A в B; D_B – стандартный предикат равенства на $B \times B$, то есть

$$D_B(a, b) = \begin{cases} 1, \text{если } a = b; \\ 0, \text{если } a \neq b. \end{cases}$$

Во второй модели входные сигналы преобразуются по разным законам, то есть осуществляется модель дифункциональности [3], которая описывается соответствующим предикатным равенством

$$E(x, y) = D_B(F_1 x, F_2 y), \qquad (2)$$

где $x, y \in A$ – множество входных сигналов; $F_1 x, F_2 y \in B$ – множество выходных сигналов; F_1, F_2 – отображения из A в B; D_B – стандартный предикат равенства на $B \times B$.

Цель работы состоит в изучении данных моделей с точки зрения структурной идентификации и выявление изоморфизма указанных моделей.

Инвариантность предикатных моделей к внутренним нелинейностям взаимнооднозначного типа

С точки зрения идентификации и построения математических моделей реальных систем имеет смысл изучать только те предикаты, которых определяют отображение, входящее в правую часть равенств (1), (2) с точностью до изоморфизма. Покажем, что для предикатов эквивалентности и дифункциональности, и только для них выполняется это свойство.

Утверждение 1. Пусть F – отображение L в A, а G – отображение L в B и отображения F и G обладают следующими свойствами: для любых $x, y \in L$: $Fx = Fy \Leftrightarrow Gx = Gy$, тогда найдется взаимно однозначное соответствие $\varphi : J_m F = J_m F$, для которого $\varphi F = G$.

Доказательство. На множестве L отображение F осуществляет разбиение его на классы следующим образом: $x, y \in L$ лежат в одном классе, если $Fx = Fy$. Будем обозначать это разбиение Ω_A, а его элементы – ω_a, причем, если $x \in \omega_a$, то $Fx = a \in A$. Аналогично введем разбиение Ω_B с элементами ω_b, индуцируемое на L с отображением G. Докажем, что эти разбиения совпадают, то есть $\Omega_A = \Omega_B$. Для этого возьмем произвольный элемент $\omega_a \in \Omega_A$ и произвольные $x, y \in \omega_a$. Тогда $Fx = Fy$, отсюда $Gx = Gy = b$, то есть $x, y \in \omega_b$. Следовательно, любая пара из ω_a принадлежит ω_b. Значит, $\omega_a \subset \omega_b$. Но это включение выполняется и в обратную сторону. Действительно, если $x', y' \in \omega_b$, то $Gx' = Gy' = b$ и это означает, что

$Fx' = Fy' = a$, то есть $x', y' \in \omega_a$ или $\omega_b \subset \omega_a$. Последнее равенство означает, что любой элемент разбиения Ω_A является элементом разбиения Ω_B, и наоборот, следовательно $\Omega_a = \Omega_b$.

Теперь построим взаимно однозначное отображение $\varphi : \mathrm{Im}\,F \to \mathrm{Im}\,G$. Зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathrm{Im}\,F \subset A$. Для этого элемента найдется x, для которого $Fx = a$, значит $x \in \omega_a$. Поскольку $\Omega_a = \Omega_b$, то найдется $\omega_a = \omega_b$. Тогда $x \in \omega_b$, следовательно, $Gx = b$ - единственный элемент, $b \in \mathrm{Im}\,G \subset B$. Положим $\varphi(a) = b$. Покажем, построенное отображение взаимно однозначно.

Пусть $a_1 \cdot a_2 \in \mathrm{Im}\,F$ и $a_1 \neq a_2$. Тогда, так как каждому элементу из образа соответствует единственный элемент разбиения, то $\omega_{a_1} \neq \omega_{a_2}$. Отсюда $\omega_{b_1} = \omega_{a_1}$, $\omega_{b_2} = \omega_{a_2}$ и $\omega_{b_1} \neq \omega_{a_2}$, следовательно, $b_1 \neq b_2$, то есть $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. Покажем, что для любого $b \in \mathrm{Im}\,G$, найдется $a \in \mathrm{Im}\,F$, для которого $\varphi(a) = b$. Действительно, произвольному $b \in \mathrm{Im}\,G$ соответствует $\omega_b \in \Omega_b = \Omega_a$. Отсюда вытекает, что в $\mathrm{Im}\,F$ найдется элемент a такой, что $\omega_b = \omega_a$, а это означает: $\varphi(a) = b$.

Окончательно имеем, что построенное нами отображение $\varphi : \mathrm{Im}\,F \to \mathrm{Im}\,F$ – взаимно однозначно.

Остается показать, что для этого отображения φ выполняется $\varphi F = G$. Для этого возьмем произвольный элемент $x \in L$, тогда $Fx = a \in \mathrm{Im}\,F$ и $Gx = b \in \mathrm{Im}\,G$. Отсюда $x \in \omega_a, \omega_b$, но так как ω_a и ω_b – элементы одного и того же разбиения, то $\omega_a = \omega_b$ (пересечение их – непустое множество). Но это значит, что $\varphi(a) = b$, следовательно, $\varphi Fx = \varphi(a) = b = Gx$.

Замечание 1. В доказательстве утверждения 1 выбрав произвольный класс $\omega_a \in \Omega_A$, мы предполагали, что найдутся два элемента $x, y \in \omega_a$. Это предположение несущественно. Действительно, пусть ω_a состоит из одного элемента x, то есть $x = \omega_a$. Но тогда этот элемент входит в качестве класса и в разбиение Ω_B. Он просто равен классу ω_b, для которого $Gx = b$. Так как, если предположить, что ω_b содержит еще какой-либо элемент y, то $Gy = b$, значит $Gx = Gy$, и $Fx = Fy = a$, то есть существует $y \in \omega_a$. Но это противоречит предположению, что ω_a состоит из одного элемента.

Замечание 2. В утверждении 1 взаимно однозначное соответствие осуществляется только между образами отображений F и G. При этом между множествами A и B такого соответствия может и не существовать, поскольку условия утверждения останутся справедливыми, если $A = G_1 \cup \mathrm{Im}\,F$, $B = G_2 \cup \mathrm{Im}\,G$, где G_1 и G_2 - произвольные множества. Однако, если $A = \mathrm{Im}\,F$, а $B = \mathrm{Im}\,G$, то $\varphi : A \to B$.

Утверждение 2. Пусть $F_1 : L \to A$, $F_2 : L \to A$, $G_1 : L \to B$, $G_2 : L \to B$ - произвольные отображения, для которых выполняется свойство:

$$\forall x, y \in L : F_1 x = F_2 y \Leftrightarrow G_1 x = G_2 y,$$

тогда найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : C \to D$, для которого $\varphi F_1 = G_1$ на Ω_1 и $\varphi F_2 = G_2$, где $G = \mathrm{Im}\,F_1 \cap \mathrm{Im}\,F_2$, $D = \mathrm{Im}\,G_1 \cap \mathrm{Im}\,G_2$; Ω_1 – множество $x \in L$, для которых $F_1 x \in \mathrm{Im}\,F_2$, Ω_2 – множество $x \in L$, для которых $F_2 x \in \mathrm{Im}\,F_1$.

Доказательство. Возьмем два произвольных элемента $x, y \in L$, таких, что $F_{1x} = F_1 y$ и $F_1 y = F_1 z$. Тогда найдется $z \in L$, для которого $F_1 x = F_2 z$, $F_1 y = F_2 z$. Отсюда, по условию утверждения 1 имеем, что $G_1 x = G_2 z$ и $G_1 y = G_2 z$, то есть $G_1 x = G_1 y$. Таким образом, если $x, y \in \Omega_1$, то из равенства $F_1 x = F_1 y$ вытекает $G_1 x = G_1 y$. Заметим, что если $x, y \in \Omega_1$, то из равенства $G_1 x = G_1 y = G_2 z$ вытекает, что $G_1 x = \mathrm{Im}\,G_2$. Поэтому аналогичные рассуждения можно провести и в обратную сторону и показать, что для любых $x, y \in \Omega_1$ из равенства $G_1 x = G_1 y$ следует, что $F_1 x = F_1 y$. Таким образом, $F_1 x = F_1 y \Leftrightarrow G_1 x = G_1 y$ на Ω_1. Поэтому из утверждения 1 существует взаимнооднозначное отображение $\varphi : \mathrm{Im}\,F_1 \to \mathrm{Im}\,G_1$, для которого $\varphi F_1 = G_1$, $x \in \Omega_1$.

Покажем, что для любого $x \in \Omega_2$ выполняется $\varphi F_2 = G_2$, где $\varphi : G \to D$. Действительно, пусть $x \in \Omega_2$, тогда $F_2 x \in J_m F_1$ и найдется $y : F_2 x = F_1 y$. Заметим, что это означает $y \in \Omega_1$. Следовательно, из условия леммы 2 $G_2 x = G_1 y$ с одной стороны, и $\varphi F_2 x = \varphi F_1 y = G_1 y$ – с другой, то есть $\varphi F_2 x = G_2 x$.

Условия существования предикатных моделей

Доказанные утверждения позволяют сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Произвольный предикат $E(x, y)$, заданный на $L \times L$, удовлетворяет равенствам

$$E(x, y) = D_A(Fx, Fy) = D_B(Gx, Gy),$$

где $F : L \to A, G : L \to B;\ D_A, D_B$ – стандартные предикаты равенства на множествах A и B соответственно; тогда и только тогда, когда найдется взаимнооднозначное отображение $\varphi : \mathrm{Im}\,F \to \mathrm{Im}\,G$, для которого $\varphi F = G$

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место (4) и $E(x,y) = D_A(Fx, Fy) = I$. Тогда $\varphi Fx = \varphi Fy$ или $Gx = Gy$. Эту цепочку равенств можно пройти и в обратном порядке, то есть, если $Gx = Gy$, то $\varphi^{-1}G_2x = \varphi^{-1}G_1y$, $Fx = Fy$ и $E(x,y) = I$. Таким образом, $E(x,y) = D_B(Gx, Gy)$, значит, равенства (3) выполняются.

Достаточность. Она вытекает из утверждения 1, так как при выполнении равенств (3) для любых $x, y \in L$ следует, что $Fx = Fy \Leftrightarrow Gx = Gy$.

Теорема 2. Произвольный предикат $E(x,y)$, заданный на $L \times L$, удовлетворяют равенствам

$$E(x,y) = D_A(F_1x, F_2y) = D_B(G_1x, G_2y),$$

где $F_1, F_2 : L \to A, G_1, G_2 : L \to B;$ D_A, D_B – стандартные предикаты равенства на множествах A и B соответственно; тогда и только тогда, когда найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : C \to D$, для которого

$$\varphi F_1x = G_1x, x \in \Omega_1;$$
$$\varphi F_2x = G_2x, x \in \Omega_2,$$

где множества C, D, Ω_1, Ω_2 определены так же, как и в утверждении 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеют место соотношения (5), и $E(x,y) = D_A(F_1x, F_2y) = I$. Это означает, что $F_1x = F_2y, x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$, $F_2y \in C$. Тогда из (5) получаем: $\varphi F_1x = \varphi F_2y$ или $G_1x = G_2Y$. Данные рассуждения проводятся и в обратном порядке. Следовательно, $E(x,y) = D_B(G_1x, G_2y)$.

Достаточность. Достаточность, как и в предыдущем случае, вытекает из утверждения 2. Поскольку, если имеют место равенства (4), то $\forall x, y \in L : F_1x = F_2y \Leftrightarrow G_1x = G_2y$.

Замечание. Отметим, что если имеют место равенства (4), то между $\mathrm{Im}\,F_1$ и $\mathrm{Im}\,G_1$ (соответственно между $\mathrm{Im}\,F_2$ и $\mathrm{Im}\,G_2$) взаимно однозначного соответствия может и не существовать, и, таким образом, нельзя утверждать, равенства $\varphi F_1 = G_1$ и $\varphi F_2 = G_2$ выполняются всюду, где определены указанные отображения. В этом можно убедиться, рассмотрев следующий пример.

Определим отображения F_1, F_2, G_1, G_2 на множестве $\{1,2,3,4,5\}$ в табл. 1, 2.

Таблица 1

Табличное представление отображений F_1, F_2, G_1, G_2

F_1 :	1	2	3	4	5
	0	1	2	2	3
F_2	1	2	3	4	5
	2	2	3	4	5
G_1	1	2	3	4	5
	0	0	2	2	3
G_2	1	2	3	4	5
	2	2	3	4	5

Тогда для предиката $E_1(x,y) = D(F_1x, F_2y)$ таблица будет иметь вид:

Таблица 2

Табличное задание предиката дифункциональности $E_1(x,y)$

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1

Нетрудно убедиться, что такую же таблицу можно построить и для предиката $E_2(x,y) = D(G_1x, G_2y)$, то есть $E_1 = E_2$ или имеют место равенства (4):

$$E(x,y) = D(F_1x, F_2y) = D(G_1x, G_2y).$$

Однако, $\mathrm{Im}\,F_1 = \{0,1,2,3\}$, а $\mathrm{Im}\,G_1 = \{0,2,3\}$, то есть они разной мощности и взаимно однозначного соответствия между ними не существует. Такая же ситуация и для $\mathrm{Im}\,F_2, \mathrm{In}\,G_2$. С другой стороны, в данном случае $C = \{2,3\}$ и $D = \{2,3\}$, то есть в качестве отображения выступает преобразование, сохраняющее все на местах. При этом равенства $\varphi F_1 = G_1$ и $\varphi F_2 = G_2$ выполняются на множествах $\{3,4,5\}$ и $\{1,2,5\}$, так как $\Omega_1 = \{3,4,5\}$, а $\Omega_2 = \{1,2,5\}$. Последнее обстоятельство не удивительно. Из таблицы предиката видно, что на первом плече сравнения $(F_1 \cdot G_1)$ восстановление отображения с точностью до взаимно однозначного соответствия возможно в тех столбцах, где есть «1», то есть на тех элементах, для которых результат действия отображения можно с чем-либо сравнить. Аналогичная ситуация и со вторым плечом сравнения (F_2, G_2), только там восстановление возможно на тех элементах, которые соответствуют строкам с «1».

Однако существует логическая возможность ввести еще несколько типов предикатов по аналогии с указанными выше моделями. Их можно получить, меняя аргументы функций F, F_1, F_2 :

$$E(x,y) = D(F(x,x),F(x,y));$$
$$E(x,y) = D(F(x,y),F(y,y));$$
$$E(x,y) = D(F(x,y),F(x,y));$$
$$E(x,y) = D(F_1(x,x),F_2(y));$$
$$E(x,y) = D(F_1(x),F_2(x,y));$$
$$E(x,y) = D(F_1(x,y),F_2(x,y)).$$

Для того чтобы данные модели могли иметь практическую ценность, необходимо выполнение изоморфизма, описанного выше. Оказывается, что для таких моделей указанное свойство не выполняется, что можно показать, приведя соответствующие контрпримеры.

Рассмотрим на множестве $R \times R$ следующие предикаты:

$$E_1(x,y) = D(x-x,x-y);$$
$$E_2(x,y) = D\left((x-x)^2,(x-y)^2\right);$$
$$E_3(x,y) = D(x-y,y-y);$$
$$E_4(x,y) = D\left((x-y)^2,(y-y)^2\right);$$
$$E_5(x,y) = D(x-y,x-y);$$
$$E_6(x,y) = D\left((x-y)^2,(y-y)^2\right);$$
$$E_7(x,y) = D(x+y,y); \quad E_8(x,y) = D(x,0);$$
$$E_9 = D(x,x+y); \quad E_{10}(x,y) = D(0,y);$$
$$E_{11}(x,y) = D(x-y,x+y);$$
$$E_{12}(x,y) = D\left(\left(x^2-2xy+y^2,x^2-2xy\right)\right).$$

Непосредственная проверка позволяет установить справедливость следующих равенств $E_1 = E_2, E_3 = E_4, E_5 = E_6; E_7 = E_8, E_9 = E_{10}$, $E_{11} = E_{12}$, но для каждой из этих пар задающие их отображения не изоморфны.

Выводы

Выделен класс систем, для которых применим метод компараторной идентификации, это линейные системы и системы с нелинейностью взаимнооднозначного характера. С точки зрения математического моделирования связь между операторами в виде взаимно однозначного соответствия означает изоморфизм моделей. На практике такой изоморфизм часто естественен и приемлем. Например, при изучении процесса распознавания цветов органом зрения человека восстановление оператора, моделирующего этот процесс, с точностью до взаимно однозначного соответствия приводит к положительному результату, поскольку, будучи реализованным аппаратными средствами, он позволяет создать прибор, распознающий цвета подобно тому, как это делает человек, несмотря на описанную выше неточность структурной идентификации [4]. В целом такая ситуация характерна для большинства психофизических и многих технических процессов.

Список литературы

1. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

2. Бондаренко М.Ф. Теория интеллекта / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.. Изд-во СМИТ, 2007. – 576 с.

3. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

4. Бондаренко М.Ф. Теория цветового зрения / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: “Фактор-Друк”, 2002. – 206 с.

Поступила в редколлегию 16.11.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ІЗОМОРФІЗМ МОДЕЛЕЙ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ТА ДІФУНКЦІОНАЛЬНОСТІ ПРИ КОМПАРАТОРНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

О.О. Бут, А.І. Пресняков, В.В. Шляхов

Розглядаються дві моделі компараторної ідентифікації: модель еквівалентності та модель діфункціональності. Доведено, що оператор, який ідентифікується, може мати внутрішню не лінійність взаємнооднозначного типу. Показано, що при поширенні моделей на випадок операторів від двох змінних, умови ізоморфізму не виконуються.

Ключові слова: *предикат, модель еквівалентності, модель діфункціональності, компараторна ідентифікація, ізоморфізм моделей.*

ISOMORPHISM OF THE MODELS OF THE EQUIVALENCE AND DIFUNCTIONALITY DURING THE COMPARATOR IDENTIFICATION

A.A. But, A.I. Presnyakov, V.V. Shlyahov

Are examined two models of comparator identification, models of equivalence and models of difunctionality. It is proven that the identified operator can possess the property of the internal nonlinearity of one-to-one nature. It is shown that the expansion of models in the case of operators from two arguments, leads to the absence of isomorphism.

Keywords: *predicate, equivalence model, model difunctionality, comparator identification, isomorphism of models.*