УДК 681.5.015.24

Ю.И. Дорофеев

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ДИСКРЕТНЫМ ПИД-РЕГУЛЯТОРОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНИКИ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В статье предложен подход к решению задачи оптимального управления запасами в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия структурных ограничений с помощью дискретного нестационарного ПИД-регулятора в контуре обратной связи. Подход основан на использовании квадратичных функций Ляпунова, через которые осуществляется описание инвариантных эллипсоидов достижимости замкнутой системы при действии ограниченных внешних возмущений. Использование математического аппарата линейных матричных неравенств позволило сформулировать задачу синтеза как последовательность задач полуопределенного программирования, для решения которых используются специализированные пакеты на базе системы MATLAB. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: *управление запасами, метод прогнозирующего управления, метод инвариантных эллипсоидов, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.*

Введение

Процесс решения задач математической теории управления включает этапы составления математической модели управляемого процесса и задания цели управления. Для обеспечения достижения поставленной цели на основе принципа обратной связи синтезируется закон управления, который реализуется в виде соответствующего автоматического регулятора.

Возросшая сложность объектов управления требует разработки все более сложных методов построения регуляторов. Применение компьютеров позволяет синтезировать сложные регуляторы, работающие по цифровому принципу. В соответствии с этим в данной работе рассматривается модель динамической системы производства-хранения-распределения ресурсов, функционирующая в дискретном времени, для управления которой необходимо синтезировать дискретный регулятор.

Одним из подходов к решению задачи оптимального управления дискретным динамическим объектом является применение аппарата линейных матричных неравенств (ЛМН). В работе [1] данный подход применяется для синтеза линейных законов управления в случае, когда отсутствует полная информация о математической модели объекта и внешних возмущениях, а также при наличии ограничений на фазовые переменные объекта и на управление. Использование ЛМН позволяет строить закон управления в виде обратной связи по состоянию либо по измеряемому выходу объекта с пропорциональным регулятором, параметры которого определяются в результате численного решения задачи полуопределенного программирования [2].

Однако при использовании только пропорционального регулятора значение регулируемой величины никогда не стабилизируется на заданном уровне. Для устранения статической ошибки используют интегральную составляющую закона управления. В работе [3] предлагается использовать технику ЛМН для синтеза ПИ-регулятора.

Вместе с тем известно, что дифференциальная составляющая закона управления предназначена для противодействия отклонениям регулируемой величины от заданного значения, которые вызваны внешними возмущениями и прогнозируются в будущем.

Цель работы состоит в том, чтобы разработать подход к синтезу дискретного ПИД-регулятора на основе аппарата ЛМН, который позволит получить оптимальный закон управления по состоянию для дискретной системы управления запасами (СУЗ), действующей в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия структурных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий.

Постановка задачи

Задача управления запасами возникает в системах производства-хранения-распределения ресурсов, когда с целью удовлетворения потребительского спроса создаются запасы материальных ресурсов. Управление запасами заключается в определении моментов времени и объемов заказов на их восполнение. Совокупность правил, по которым принимаются подобные решения, называется стратегией управления запасами. Оптимальной стратегией является та, которая обеспечивает доставку необходимой продукции в нужном количестве нужному потребителю в нужное время при условии минимизации критерия оптимальности, учитывающего затраты на производство, хранение и транспортировку ресурсов.

Выбор модели управления запасами определяется характером спроса со стороны внешних потребителей. В настоящее время для синтеза стратегии управления запасами с заданной моделью спроса широко применяется метод прогнозирующего управления [4].

Однако, на практике, как правило, отсутствует информация для построения адекватной модели внешнего спроса, которая необходима для синтеза прогнозирующего управления.

Одним из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса является концепция «неизвестных, но ограниченных» воздействий [5]. При этом соответствующая модель спроса характеризуется интервальной неопределенностью.

Рассмотрим динамическую сетевую модель, которая описывает широкий класс СУЗ [6]. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

Для математического описания однономенклатурной СУЗ с периодической проверкой уровня запасов и мгновенными поставками (в течение одного периода) используется дискретная модель в пространстве состояний, уравнения которой описывают изменение уровня запасов каждого вида ресурсов с течением времени. В качестве переменных состояний рассматриваются наличные уровни запаса ресурсов в узлах сети. Управляющими воздействиями являются объемы заявок на поставку ресурсов, формируемые узлами сети в текущем периоде. Объемы спроса на ресурсы, поступающие из внешней среды и формирующие неуправляемые потоки, целесообразно рассматривать в качестве внешних возмущающих воздействий.

Характерной особенностью СУЗ является наличие запаздываний, обусловленных задержками в пополнении запасов относительно момента формирования заказа. Для описания запаздываний используется модель дискретной задержки, поскольку предполагается, что значения временных интервалов, определяющие длительность транспортировки и переработки ресурсов в узлах сети, известны, кратны выбранному периоду дискретизации и не меняются в процессе функционирования.

Предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Тогда математическая модель СУЗ задается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Wd(k), \quad (1)$$

где $k = 0,1,...$ - номер дискретного интервала; n - количество узлов сети; m - количество управляемых потоков; q - количество неуправляемых потоков; $x(k) \in \mathbf{R}^n$ - вектор состояний; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ - вектор управляющих воздействий; $d(k) \in \mathbf{R}^q$ - вектор внешних возмущений; Λ - максимальное значение величины запаздывания управляемых потоков среди всех пар связанных узлов сети; $B_t \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $t = \overline{0,\Lambda}$, $W \in \mathbf{R}^{n\times q}$ - матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно, методика построения которых изложена в работе [7].

В процессе функционирования СУЗ должны выполняться структурные ограничения:

$$\begin{aligned} x(k) &\in X = \left\{x \in \mathbf{R}^n : 0 \le x \le x^{\max}\right\}, \\ u(k) &\in U = \left\{u \in \mathbf{R}^m : 0 \le u \le u^{\max}\right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где векторы $x^{\max}$ и $u^{\max}$, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и максимальные объемы транспортировок, считаются заданными.

Будем предполагать, что векторы внешних возмущений удовлетворяют ограничениям:

$$d(k) \in D = \left\{d \in \mathbf{R}^q : 0 \le d^{\min} \le d \le d^{\max}\right\},$$

где векторы $d^{\min}$ и $d^{\max}$ определяют граничные значения спроса и предполагаются известными.

Для системы (1) рассматривается задача синтеза оптимальной стратегии управления запасами, которая для любого начального состояния $x(0) \in X$ и спроса $d(k) \in D \ \ \forall k \ge 0$ обеспечивает:

1) полное и своевременное удовлетворение спроса;

2) оптимизацию критерия качества работы системы;

3) асимптотическую робастную устойчивость замкнутой системы при ограничениях (2).

Изложение основного материала

Первым этапом решения задачи синтеза управления является преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздываний на основе расширения вектора состояний [8] путем включения в него векторов объемов ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки и переработки

$$\xi(k) = \\ = \left[x^T(k), u^T(k-1), u^T(k-2), ..., u^T(k-\Lambda)\right]^T.$$

Тогда уравнения расширенной модели СУЗ примут вид:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k), \\ x(k) &= C\xi(k), \end{aligned} \tag{3}$$

где матрицы $A \in \mathbf{R}^{N\times N}$, $B \in \mathbf{R}^{N\times m}$, $G \in \mathbf{R}^{N\times q}$, $C \in \mathbf{R}^{n\times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [7].

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема:

$$E(d_c, P_d) = \left\{ d \in \mathbf{R}^q : \left(d - d_c\right)^T P_d^{-1} \left(d - d_c\right) \le 1 \right\}, \tag{4}$$

матрица которого P_d и вектор координат центра d_c определяются в результате решения задачи выпуклой оптимизации:

$$-\log\det E \to \min \tag{5}$$

при ограничениях на матричную $E = E^T \in \mathbf{R}^{q\times q}$ и векторную $d \in \mathbf{R}^q$ переменные:

$$E \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \left(Ed_i - d\right)^T \\ Ed_i - d & I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, q^2},$$

где d_i - векторы, содержащие все возможные комбинации значений векторов $d^{\min}$ и $d^{\max}$.

Решение задачи (5) $\hat{E}, \hat{d}$ определяет параметры аппроксимирующего эллипсоида $E(d_c, P_d)$:

$$P_d = \hat{E}^{-2}, \quad d_c = \hat{E}^{-1}\hat{d}.$$

Будем строить закон управления в виде линейной нестационарной обратной связи с ПИД-регулятором, использующим сигнал невязки между наличным и страховым уровнями запаса. Для этого введем вектор $\xi^* \in R^N$, состоящий из векторов $x^* \in \mathbf{R}^n$ в количестве $\Lambda + 1$. Значения элементов вектора x^* определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются с помощью продуктивной модели Леонтьева на основании средних значений внешнего спроса с учетом величины запаздывания:

$$x^* = \left(I - \Pi\right)^{-1} d^{mean},$$

$$d_i^{mean} = \begin{cases} \dfrac{\Lambda_i}{2}(d_i^{\max} + d_i^{\min}), & i = \overline{1, q}, \\ 0, & i = \overline{q+1, n}, \end{cases} \tag{6}$$

где Λ_i - максимальное значение величины запаздывания управляемых потоков i-го узла сети; Π - технологическая матрица, значение элемента (i, j) которой равно количеству единиц ресурса i, необходимого для производства единицы ресурса j.

Если для аппроксимации непрерывного интеграла используется метод прямоугольников, то в дискретном виде ПИД-закон управления можно представить следующим образом [9]:

$$u(k) = k_P\left(\xi(k) - \xi^*\right) + k_I \sum_{i=0}^{k-1}\left(\xi(i) - \xi^*\right) + $$
$$+ k_D\left(\xi(k) - \xi(k-1)\right),$$

где k_P, k_I, k_D - коэффициенты передачи пропорциональной, интегральной и дифференциальной части регулятора, соответственно.

Для практической реализации закона управления более удобной является рекуррентная форма записи. Она характеризуется тем, что для вычисления текущего значения управляющего воздействия $u(k)$ используется его предыдущее значение $u(k-1)$ и величина поправки:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + K_0(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) + \\ &+ K_1(k)\left(\xi(k-1) - \xi^*\right) + K_2(k)\left(\xi(k-2) - \xi^*\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $K_0(k), K_1(k), K_2(k) \in \mathbf{R}^{m\times N}$ – матрицы коэффициентов обратной связи в момент времени k.

Введем составной вектор

$$v(k) = $$
$$= \left[\left(\xi(k) - \xi^*\right)^T, \left(\xi(k-1) - \xi^*\right)^T, \left(\xi(k-2) - \xi^*\right)^T\right]^T$$

и перепишем закон управления (7) в виде:

$$u(k) = u(k-1) + F(k)v(k), \tag{8}$$

где блочная матрица $F(k) \in \mathbf{R}^{m\times 3N}$ равна

$$F(k) = \left[K_0(k)\ K_1(k)\ K_2(k)\right].$$

Тогда расширенную модель замкнутой СУЗ для управления (8) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \left(AZ + BF(k)\right)v(k) + \left(A - I\right)\xi^* + \\ &+ Bu(k-1) + W\left(d(k) - d_c\right) + Wd_c, \\ x(k) &= C\xi(k), \end{aligned} \tag{9}$$

где блочная матрица $Z \in \mathbf{R}^{N\times 3N}$ равна

$$Z = \left[I_{N\times N}\ 0_{N\times N}\ 0_{N\times N}\right].$$

Для синтеза оптимального управления необходимо построить оценку верхнего граничного значения критерия качества с помощью квадратичной функции Ляпунова, построенной на решениях системы. Запишем критерий качества в случае бесконечного временного горизонта:

$$J_\infty(k) = $$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^T R_x\left(\xi(k) - \xi^*\right) + u^T(k)R_u u(k)\right), \tag{10}$$

где $R_x \in \mathbf{R}^{N\times N}, R_u \in \mathbf{R}^{m\times m}$ - положительно определенные диагональные весовые матрицы.

Первое слагаемое в выражении (10) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запаса ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и транспортировки ресурсов.

Задача синтеза оптимального управления сводится к решению минимаксной задачи:

$$u(k) = \arg \min_{u(k)\in U} \left(\max_{d(k)\in E(d_c,P_d)} J_\infty(k) \right). \quad (11)$$

Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (9):

$$V\left(\xi(k) - \xi^*\right) = \left(\xi(k) - \xi^*\right)^T P(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right), \quad P(k) = P^T(k) \in \mathbf{R}^{N\times N}, P(k) \succ 0. \quad (12)$$

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (12) в силу системы (9) и потребуем, чтобы $\forall k \ge 0$ выполнялось неравенство, которое гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы:

$$V\left(\xi(k+1) - \xi^*\right) - V\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le -J_\infty(k). \quad (13)$$

Если неравенство (13) выполняется, то следуя [2], можно показать, что функция Ляпунова (12) $\forall k \ge 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (10):

$$\max_{d(k)\in E(d_c,P_d)} J_\infty(k) \le V\left(\xi(k) - \xi^*\right). \quad (14)$$

Тогда, в соответствии с (14), задача (11) эквивалентна задаче минимизации функции Ляпунова

$$u(k) = \arg \min_{u(k)\in U} V\left(\xi(k) - \xi^*\right),$$

которая, в свою очередь, эквивалентна задаче вычисления минимального скалярного значения $\gamma(k) > 0$ такого, что $\forall k \ge 0$ выполняется неравенство:

$$\left(\xi(k) - \xi^*\right)^T P(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le \gamma(k).$$

В соответствии с [2] введем матричную переменную

$$Q(k) = \gamma(k)P^{-1}(k) \quad (15)$$

и получим эквивалентную задачу:

$$\gamma(k) \to \min_{Q(k)} \text{ при условиях}$$
$$\gamma(k) > 0, \quad \left(\xi(k) - \xi^*\right)^T Q^{-1}(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le 1, \quad (16)$$

которую можно трактовать как задачу минимизации по критерию следа инвариантного эллипсоида, выступающего в качестве оценки множества достижимости замкнутой системы (9) при действии ограниченных внешних возмущений $d(k) \in E(d_c, P_d)$.

С помощью леммы Шура [1] нестрогое неравенство в (16) представим в виде двух ЛМН и получим задачу полуопределенного программирования (ПОП):

$$\gamma(k) \to \min_{Q(k)}$$
$$\text{при условиях}: \quad \gamma(k) > 0,\ Q(k) \succ 0,$$
$$\begin{bmatrix} 1 & \left(\xi(k) - \xi^*\right)^T \\ \left(\xi(k) - \xi^*\right) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (17)$$

Следуя [2], введем матричную переменную $Y(k) \in \mathbf{R}^{m\times 3N}$:

$$Y(k) = F(k)\cdot \text{block diag}\left(Q(k), Q(k), Q(k)\right). \quad (18)$$

Используя *S*-процедуру [1] неравенство (13), гарантирующее убывание с течением времени значения функции Ляпунова (12), и неравенство (4), описывающее эллипсоид, аппроксимирующий множество D, представим в виде ЛМН (19), используя методику, изложенную в работе [10]:

$$\begin{bmatrix}
\text{blockdiag}\left(Q(k),0,0\right) & 0 & Y^T(k)R_u & 0 & \left(Z_A + BY(k)\right)^T & 0 & \text{blockdiag}\left(Q(k)R_x^{\frac{1}{2}},0,0\right) & Y^T(k)R_u^{\frac{1}{2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & A-I & 0 & 0 & 0 \\
R_uY(k) & 0 & \gamma(k)R_u & 0 & \gamma(k)B^T & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & G^T & 0 & 0 & 0 \\
Z_A + BY(k) & A-I & \gamma(k)B & G & Q(k) & \gamma(k)WP_d^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)P_d^{\frac{1}{2}}W^T & \gamma(k)\alpha I & 0 & 0 \\
\text{blockdiag}\left(R_x^{\frac{1}{2}}Q(k),0,0\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I & 0 \\
R_u^{\frac{1}{2}}Y(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I
\end{bmatrix} \succeq 0, \quad (19)$$

где $б \ge 0$ - некоторый скаляр; $Z_A = \left[AQ(k)\ \ 0_{N\times N}\ \ 0_{N\times N}\right]$.

Рассмотрим ограничения на значения состояний и управлений (2). Для того, чтобы первое из ограничений представить в виде ЛМН, выполним аппроксимацию множества X эллипсоидом

$$E(x^*, P_x) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \left(x - x^*\right)^T P_x^{-1}\left(x - x^*\right) \le 1 \right\}, \quad (20)$$

у которого вектор координат центра совпадает с вектором страховых запасов x^*, а матрица P_x вычисляется на основании вектора x^{max}:

$$P_x = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{4}\left(\min\left\{x_1^*, x_1^{max} - x_1^*\right\}\right)^2, ..., \frac{1}{4}\left(\min\left\{x_n^*, x_n^{max} - x_n^*\right\}\right)^2\right).$$

Введем в рассмотрение инвариантный по выходам замкнутой системы (9) эллипсоид:

$$E(x^*, C^T P(k) C) = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \left(x - x^*\right)^T \left(C^T P(k) C\right)^{-1} \left(x - x^*\right) \le 1\right\}. \quad (21)$$

Тогда для того, чтобы было верно первое из неравенств (2), необходимо, чтобы объем эллипсоида (21) не превосходил объема эллипсоида (20), что эквивалентно выполнению следующего неравенства:

$$C^T P(k) C \le P_x .$$

С учетом тождества (15) и с помощью леммы Шура последнее неравенство может быть представлено в виде ЛМН:

$$\begin{bmatrix} \gamma(k)P_x & \gamma(k)C \\ \gamma(k)C^T & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0 . \quad (22)$$

Рассмотрим второе из ограничений (2) на управляющие воздействия, которое запишем в виде двух неравенств:

$$0 \le u(k), \quad u(k) \le u^{max} . \quad (23)$$

С учетом закона управления (8) и тождества (18) неравенства (23) представим в виде:

$$\begin{gathered} -u(k-1) \le \\ \le Y(k) \cdot \operatorname{block\,diag}\left(Q^{-1}(k), Q^{-1}(k), Q^{-1}(k)\right) \cdot v(k); \\ Y(k) \cdot \operatorname{block\,diag}\left(Q^{-1}(k), Q^{-1}(k), Q^{-1}(k)\right) \cdot v(k) \le \\ \le u^{max} - u(k-1). \end{gathered} \quad (24)$$

Умножим слева каждое из неравенств (24) сначала на $Y^+(k)$, где «$^+$» - псевдообращение Мура-Пенроуза, а затем на $v^T(k)$, и с помощью леммы Шура представим в виде неравенств (25).

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} -v^T(k)Y^+(k)u(k-1) & v^T(k) \\ v(k) & \operatorname{block\,diag}\left(Q(k), Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \preceq 0, \\ \begin{bmatrix} v^T(k)Y^+(k)\left(u^{max} - u(k-1)\right) & v^T(k) \\ v(k) & \operatorname{block\,diag}\left(Q(k), Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \succeq 0. \end{gathered} \quad (25)$$

Чтобы сделать неравенства (25) линейными относительно $Y(k)$, умножим первое из неравенств слева на блочно-диагональную матрицу

$$\operatorname{block\,diag}\left(u^+(k-1)Y(k), I_{3N\times 3N}\right)^T$$

и справа на

$$\operatorname{block\,diag}\left(u^+(k-1)Y(k), I_{3N\times 3N}\right),$$

а второе неравенство – слева на

$$\operatorname{block\,diag}\left(\left(u^{max} - u(k-1)\right)^+ Y(k), I_{3N\times 3N}\right)^T$$

и справа на

$$\operatorname{block\,diag}\left(\left(u^{max} - u(k-1)\right)^+ Y(k), I_{3N\times 3N}\right).$$

В результате получим ЛМН (26).

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} -Y^T(k)\left(u^+(k-1)\right)^T v^T(k) & Y^T(k)\left(u^+(k-1)\right)^T v^T(k) \\ v(k)u^+(k-1)Y(k) & \operatorname{block\,diag}\left(Q(k), Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \preceq 0, \\ \begin{bmatrix} Y^T(k)\left(\left(u^{max} - u(k-1)\right)^+\right)^T v^T(k) & Y^T(k)\left(\left(u^{max} - u(k-1)\right)^+\right)^T v^T(k) \\ v(k)\left(u^{max} - u(k-1)\right)^+ Y(k) & \operatorname{block\,diag}\left(Q(k), Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \succeq 0. \end{gathered} \quad (26)$$

Таким образом, приходим к задаче минимизации линейной функции

$$\gamma(k) \to \min_{Q(k), Y(k), \alpha} \quad (27)$$

при ограничениях на матричные переменные $Q(k) = Q^T(k) \in \mathbf{R}^{N\times N}$, $Y(k) \in \mathbf{R}^{m\times 3N}$ и скалярные параметры $\alpha, \gamma(k)$, представленные в виде ЛМН (17), (19), (22), (26). При фиксированном значении скаляра α указанная задача является задачей ПОП.

Если задача (27), которая представляет собой совокупность задачи одномерной выпуклой оптимизации по параметру α и задачи ПОП, имеет решение, то система (3), замкнутая с помощью закона управления (8), где нестационарные матрицы коэффициентов обратной связи вычисляются по формуле

$$\begin{gathered} \left[K_0(k)\ K_1(k)\ K_2(k)\right] = \\ = Y(k) \cdot \operatorname{block\,diag}\left(Q^{-1}(k), Q^{-1}(k), Q^{-1}(k)\right) \end{gathered} \quad (28)$$

для любого начального состояния $x(0) \in X$ и неопределенного, но ограниченного внешнего возмущения $d(k) \in E(d_c, P_d)$, является асимптотически робастно устойчивой при ограничениях (2).

Численный пример

В качестве примера рассмотрим модель системы производства-хранения-распределения ресурсов, которая изучалась в работе [11].

Модель сети описывается графом

$$G = \left(\{1,2,3,4,5\},\{(5,1),(5,2),(5,3),(4,3),(3,1),(3,2)\}\right)$$

. Заданы значения времени выполнения заказа в узлах сети: $T_1 = T_3 = T_5 = 1$, $T_2 = T_4 = 2$ и времени транспортировки ресурсов между узлами сети: $T_{5,1} = T_{5,2} = T_{5,3} = T_{4,3} = T_{3,1} = T_{3,2} = 1$. По формуле $\Lambda_i = \max\left\{T_{j,i} + T_i,\ i,j = \overline{1,5},\ j \neq i\right\}$ определим величины запаздывания управляемых потоков для всех узлов сети, в результате получим $\Lambda = 3$.

Представим управляемые потоки u_1, u_2 и u_3 в виде гипердуг, добавив потоки u_4 и u_5, которые описывают поставки сырья извне, как показано на рис. 1. Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции Π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла указаны значения времени выполнения заказа T_i. Заданы максимальные вместительности хранилищ

$$x^{max} = [200, 180, 550, 3000, 1500]^T$$

и максимальные объемы транспортировок

$$u^{max} = [100, 100, 200, 1000, 700]^T,$$

а также граничные значения внешнего спроса $d^{min} = [30, 20]^T$, $d^{max} = [50, 40]^T$. Начальные условия равны: $x(0) = [150, 130, 550, 1100, 1000]^T$.

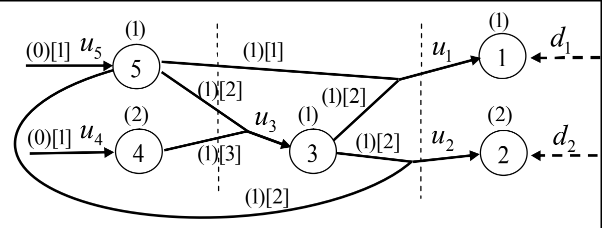
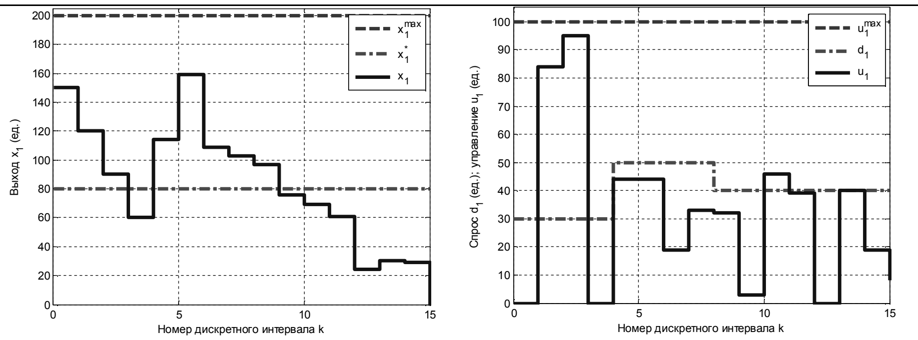


Рис. 1. Графическое представление модели сети

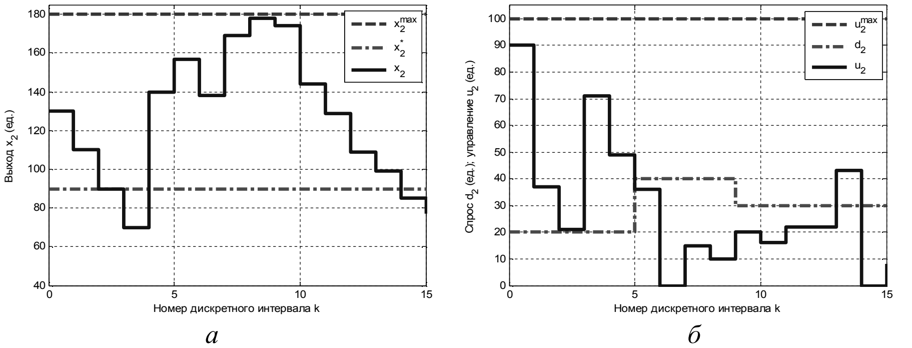
В результате решения задачи (5) найдем параметры эллипсоида $E(d_c, P_d)$: $P_d = \mathrm{diag}(200, 200)$, $d_c = [40, 30]^T$. По формуле (6) вычислим уровни страховых запасов в узлах сети $x^* = [80, 90, 340, 1020, 940]^T$.

Элементы диагональных весовых матриц выбраны равными $r_x = 1{,}0 \times 10^{-6}$, $r_u = 6{,}0 \times 10^{-6}$. Численное решение задачи получено с помощью пакета CVX [12]. Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования при $\alpha = 2$ и скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2 - 6, где а – значения наличного и страхового уровней запасов; б – значения внешнего спроса и управляющих воздействий.



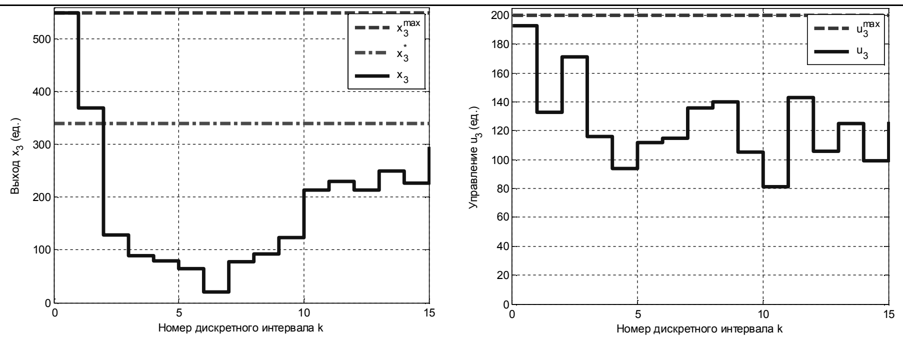
а *б*

Рис. 2. Графики переходных процессов для узла 1



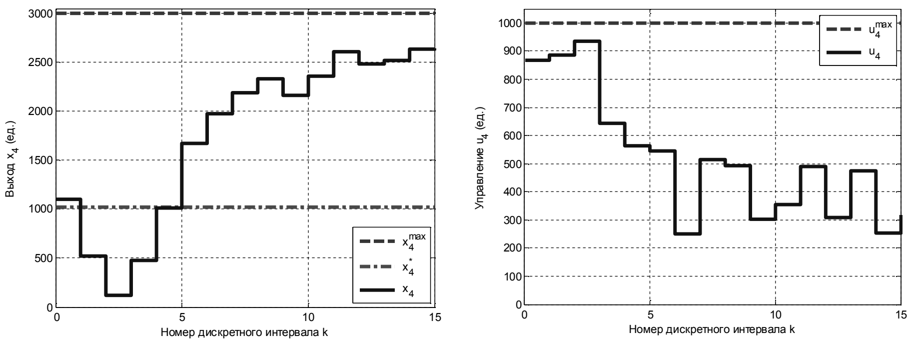
а *б*

Рис. 3. Графики переходных процессов для узла 2



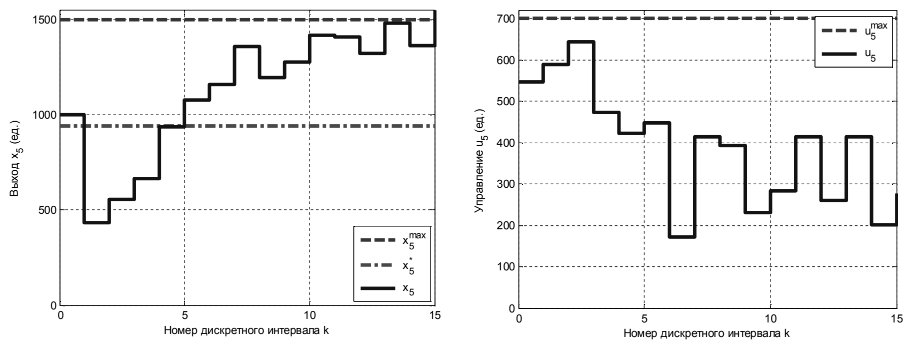
а *б*

Рис. 4. Графики переходных процессов для узла 3



а *б*

Рис. 5. Графики переходных процессов для узла 4



а *б*

Рис. 6. Графики переходных процессов для узла 5

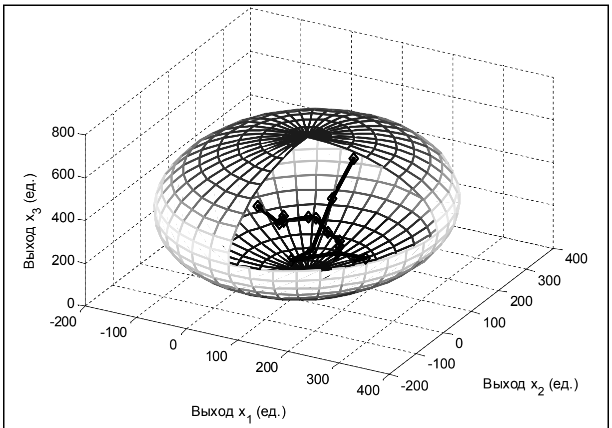


Рис.7. Фазовая траектория и инвариантный эллипсоид, полученные для узлов 1, 2 и 3

Очевидно, что фазовая траектория замкнутой системы не выходит за пределы инвариантных эллипсоидов, размеры которых зависят от выбранных значений весовых матриц R_x и R_u.

Результаты моделирования показали, что полученная стратегия управления запасами обеспечивает полное и своевременное удовлетворение неизвестного, но ограниченного внешнего спроса при условии минимизации затрат, связанных с производством, транспортировкой и хранением ресурсов, с учетом заданных ограничений на состояния и управления.

Выводы

В статье предложен подход к решению задачи синтеза дискретного нестационарного ПИД-регулятора для оптимального управления запасами в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия структурных ограничений. Подход основан на использовании квадратичных функций Ляпунова, через которые осуществляется описание инвариантных эллипсоидов достижимости замкнутой системы при действии ограниченных внешних возмущений. Использование математического аппарата ЛМН позволяет сформулировать задачу синтеза как последовательность задач одномерной выпуклой оптимизации и ПОП, для решения которых используются специализированные пакеты на базе системы MATLAB.

Полученное управление зависит от выбранного значения страхового уровня запасов, которое оказывает существенное влияние на величину управляющих воздействий и качество функционирования замкнутой системы. В рамках предложенного подхода возможен выбор оптимальных значений страховых запасов, поскольку полученное решение задачи синтеза управления задает, фактически, алгоритмическую зависимость между уровнем страховых запасов и оптимальным значением критерия качества.

Список литературы

1. *Баландин Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.*
2. *Boyd S. Linear matrix inequalities in system and control theory / S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.*
3. *Rosinova D. Robust decentralized controller design: subsystem approach / D. Rosinova, N.Q. Thuan, V. Vesely, L. Marko // Journal of Electrical Engineering. – 2012. – Vol. 63. – No. 1. – P. 28-34.*
4. *Bemporad A. Robust model predictive control: a survey / A. Bemporad, M. Morari // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1999. – Vol. 245. – P. 207-226.*
5. *Bertsekas D.P. Recursive state estimation for a setmembership description of uncertainty / D.P. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128.*
6. *Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб: Питер, 2001. – 384 с.*
7. *Дорофеев Ю.И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16-27.*
8. *Blanchini F., Feedback Control of Production-Distribution Systems with Unknown Demand and Delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. – 2000. – Vol. 16, No. 3. – P. 313-317.*
9. *Изерман Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман. – М.: Мир, 1984. – 541 с.*
10. *Дорофеев Ю.И. Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / Ю.И. Дорофеев, Л.М. Любчик, А.А. Никульченко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 5. – С. 146-160.*
11. *Hennet J.-C. A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control / J.-C. Hennet // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 793-805.*
12. *Grant M., Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. – Mode of access: URL: http://cvxr.com/cvx.*

Поступила в редколлегию 14.10.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М. Любчик, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков.

СИНТЕЗ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ З ДИСКРЕТНИМ ПІД-РЕГУЛЯТОРОМ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНІКИ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Ю.І. Дорофєєв

У статті запропоновано підхід до вирішення задачі оптимального управління запасами в умовах невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту та наявності структурних обмежень за допомогою дискретного нестаціонарного лінійного ПІД-регулятора в контурі зворотного зв'язку. Підхід заснований на використанні квадратичних функцій Ляпунова, через які здійснюється опис інваріантних еліпсоїдів досяжності замкнутої системи при дії обмежених зовнішніх збурень. Використання математичного апарату лінійних матричних нерівностей дозволяє сформулювати задачу синтезу як послідовність задач напіввизначеного програмування, для вирішення яких використовуються спеціалізовані пакети на базі системи MATLAB. Розглянуто чисельний приклад.

Ключевые слова: *управління запасами, метод прогнозуючого управління, метод інваріантних еліпсоїдів, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.*

SYNTHESIS OF OPTIMAL INVENTORY CONTROL SYSTEM WITH DISCRETE PID-CONTROLLER VIA LINEAR MATRIX INEQUALITIES TECHNIQUE

Yu.I. Dorofieiev

An approach to the solution of the optimal inventory control under “unknown but bounded” external demand and the availability of structural constraints using the discrete non-stationary linear PID controller in the feedback loop is proposed. The approach is based on the use of quadratic Lyapunov functions, through which the description of the invariant attainability ellipsoids of a close-loop system under the action of bounded perturbations is implemented. Using the Linear Matrix Inequalities allowed to formulate the synthesis problem as a sequence of semidefinite programming, for solution which is used specialized packages based on the MATLAB system. A numerical example is considered.

Keywords: *inventory control, model predictive control, invariant ellipsoids method, linear matrix inequality, semidefinite programming.*