

УДК 62-50

С.Є. Годомський

Національний технічний університет України "КПІ", Київ

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ З КОЛИВАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ НА СТІЙКІСТЬ

Виконано дослідження впливу параметрів системи керування з коливальними властивостями на стійкість та побудовано області стійкості у дво- та тривимірному просторі.

**Ключові слова:** стійкість, D-розбиття, коливальність.

### Вступ

Властивість стійкості системи автоматичного керування є необхідною умовою її працездатності та, отже, дослідження впливу різноманітних параметрів системи керування на стійкість є важливим етапом при її розрахунку та проектуванні.

У літературі відомий підхід побудови областей стійкості [1], коли визначають області значень параметрів, при яких система виявляється стійкою. Такі області стійкості будують відносно одного або двох параметрів і цей підхід носить назву D-розбиття. Для побудови областей стійкості на площині обраних параметрів наносять лінії, що відповідають границі стійкості. Утворені області, обмежені такими лініями, і є областями стійкості для конкретної системи.

Як відомо [2], розрізняють три типи границь стійкості: аперіодична, коливальна та границя типу "нескінченний корінь". Система знаходиться на аперіодичній границі стійкості, якщо її характеристичне рівняння має нульовий корінь; на коливальній границі – має пару уявних коренів; та на границі типу "нескінченний корінь", якщо характеристичне рівняння має нескінченний корінь.

Під час побудови границь області стійкості застосовують ознаки усіх трьох типів границь стійкості, але, слід зазначити, перший та третій типи лише дають підтвердження розуміння того, що параметри системи, які є конкретними фізичними величинами (коефіцієнт підсилення, постійні часу та ін.), повинні бути додатними величинами, тобто область стійкості завжди обмежена додатними напрямками осей на площині параметрів.

### Основна частина

Побудова областей стійкості в площині двох параметрів описана, наприклад, у [1]. Для цього застосовують критерій стійкості Михайлова. Оскільки коливальній границі стійкості відповідає рівність нулю комплексного характеристичного рівняння  $D(j\omega) = 0$  або проходження годографа Михайлова через початок координат, тому для побудо-

ви областей стійкості в просторі двох параметрів користуються саме цією властивістю. У якості ілюстрації розглянемо передавальну функцію системи керування

$$W(s) = \frac{K}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)}, \quad (1)$$

де  $\xi$  – коефіцієнт згасання коливальної складової системи.

Припустимо, що коефіцієнт згасання  $\xi$  відомий і необхідно побудувати область стійкості в просторі двох параметрів: коефіцієнта підсилення системи  $K$  та постійної часу  $T_1$ .

Запишемо характеристичне рівняння системи (1)

$$D(s) = T_1^2 s^3 + 2\xi T_1 s^2 + s + K. \quad (2)$$

Тоді комплексне характеристичне рівняння матиме вигляд

$$D(j\omega) = -T_1^2 j\omega^3 - 2\xi T_1 \omega^2 + j\omega + K. \quad (3)$$

Представимо:  $D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ .

Тоді

$$D(j\omega) = (-2\xi T_1 \omega^2 + K) + j(-T_1^2 \omega^3 + \omega). \quad (4)$$

Границя стійкості відповідає рівності нулю дійсної та уявної частин комплексного характеристичного рівняння (4) замкнутої системи

$$\begin{cases} X(\omega) = -2\xi T_1 \omega^2 + K = 0, \\ Y(\omega) = -T_1^2 \omega^3 + \omega = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{\omega}, \\ K = 2\xi \omega. \end{cases} \quad (5)$$

Отже маємо параметричні рівняння деякої кривої, що описує границю стійкості системи. За допомогою пакета MATLAB побудуємо криві для трьох значень коефіцієнту згасання  $\xi = 0.05$ ,  $\xi = 0.5$  та  $\xi = 0.8$  змінюючи частоту від 0 до  $+\infty$ .

Скрипт, що реалізує процес побудови кривих, представлено на рис. 1.

У результаті отримуємо три області стійкості (рис. 2) при трьох різних значеннях коефіцієнту згасання, при чому можна помітити, що зі зменшенням коефіцієнту згасання (коливальність системи підвищується) область стійкості стискається.

Наведений підхід, як зазначалося вище, відомий та широко застосовується під час проектування систем автоматичного керування. Однак, навіть у наведеному ілюстративному прикладі, ми стикнулися з тим, що кількість параметрів, вплив яких на стійкість є важливим для проектувальника більше двох. Тому пропонується відомий підхід під назвою D-розбиття на площині двох параметрів розширити на тривимірний простір та дати йому назву 3D-розбиття. Цей підхід є особливо корисним з точки зору того, що на сучасному етапі розвитку обчислювальної техніки можливо виконувати побудову графіків високої складності.

Для виконання 3D-розбиття необхідно отримати параметричне рівняння поверхні, що обмежує область стійкості системи. Для цього скористаємося алгебраїчним критерієм стійкості Гурвіца, а саме умовою знаходження системи на границі стійкості, яка має вигляд

$$\Delta_{n-1} = 0, \tag{6}$$

що відповідає рівності нулю передостаннього визначника Гурвіца.

```

% K - коефіцієнт підсилення
% T1 - постійна часу
% o - частота
% i - коефіцієнт згасання

o=0.01:0.01:1000;
T1=1./o;

i=0.05;
K=2*i*o;
plot(K, T1)
hold on

i=0.5;
K=2*i*o;
plot(K, T1)
hold on

i=0.8;
K=2*i*o;
plot(K, T1)
hold on
    
```

Рис. 1. Побудова областей стійкості у MATLAB

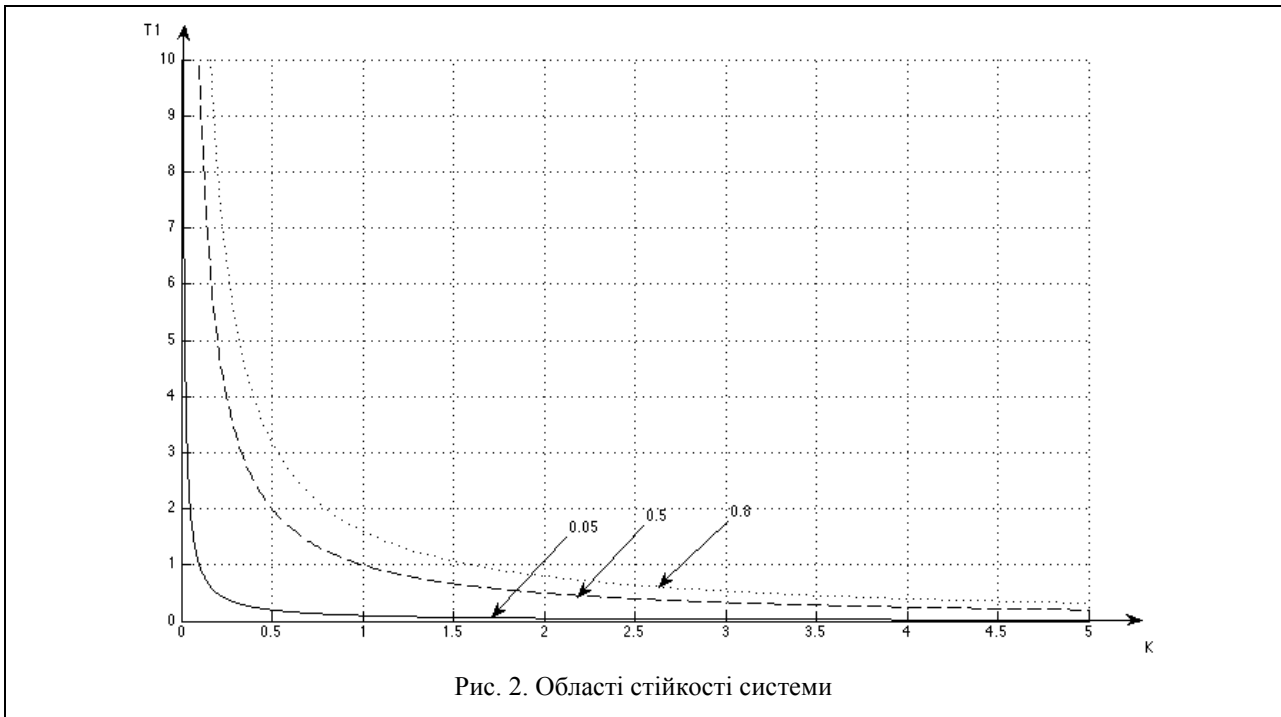


Рис. 2. Области стійкості системи

Рівняння (6) приводить до рівняння поверхні, що описує границю стійкості системи.

Побудуємо 3D-розбиття для ілюстративного прикладу системи (1). Будемо досліджувати вплив таких трьох параметрів на стійкість: коефіцієнт підсилення, постійна часу та коефіцієнт згасання. На основі характеристичного рівняння (2) запишемо умову (6)

$$\Delta_{n-1} = 2\xi T_1 - T_1^2 K = 0 \tag{7}$$

звідки знаходимо рівняння поверхні

$$K = \frac{2\xi}{T_1}. \tag{8}$$

Введемо наступні позначення у (8):

$$z = K, \quad x = \xi, \quad y = T_1.$$

Тоді у тривимірному просторі отримаємо рівняння поверхні

$$z = \frac{2x}{y}. \tag{9}$$

Скрипт, що реалізує побудову поверхні у MATLAB представлено на рис. 3.

Коефіцієнт згасання за визначенням може приймати значення з інтервалу (0;1), тому виконано розбиття саме цієї області.

```

% ksi - коефіцієнт згасання
% T1 - постійна часу
% K - коефіцієнт підсилення

% задаємо інтервал зміни коефіцієнту згасання
ksi=0.01:0.01:0.99;

% задаємо інтервал зміни постійної часу
T1=0:0.01:2;

% будуємо простір на основі заданих змінних
[x,y]=meshgrid(ksi, T1);

% обчислюємо значення 3-ї координати
z=2*x./y;

% будуємо поверхню
mesh(x,y,z);

```

Рис. 3. Побудова поверхні у MATLAB

Пакет MATLAB дозволяє представляти поверхні у будь-якому ракурсі, довільно обертаючи їх у просторі. Це особливо корисно для аналізу отриманих результатів під час проектування системи керування та дослідженні її властивостей з точки зору стійкості. На рис. 4 представлені два ракурси отриманої поверхні.

Множина точок, що знаходяться під побудованою поверхнею і буде областю стійкості об'єкту керування, що розглядаються. Знизу область стійкості обмежена площинами, що утворені додатними напівосями, що впливає не тільки, як зазначалося вище, з існування трьох типів границь стійкості, алей з того, що величини, відкладені за відповідними осями є не просто математичними, а реальними фізичними. Тобто, коефіцієнт підсилення системи, постійна часу та коефіцієнт затухання за своєю природою не можуть приймати негативних значень.

## Висновки

У статті виконано дослідження впливу параметрів системи автоматичного керування на стійкість шляхом побудови областей стійкості за допомогою пакету MATLAB.

Запропоновано виконувати дослідження в просторі трьох параметрів, що дозволяє надати значно ширшу інформацію проектувальнику системи щодо її властивостей.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

С.Е. Годомский

*Выполнено исследование влияния параметров системы управления с колебательными свойствами на устойчивость системы и построены области устойчивости в двух- и трехмерном пространствах.*

**Ключевые слова:** *стойкость, D-разбиение, колебательность.*

## INFLUENCE OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEM PARAMETERS WITH OSCILLATION PROPERTIES FOR STABILITY

S.E. Godomsky

*Effect of control system parameters with oscillation properties for system stability were studied. Stability domains in two- and three-dimensional spaces were plotted.*

**Keywords:** *firmness, D-breaking up, shake.*

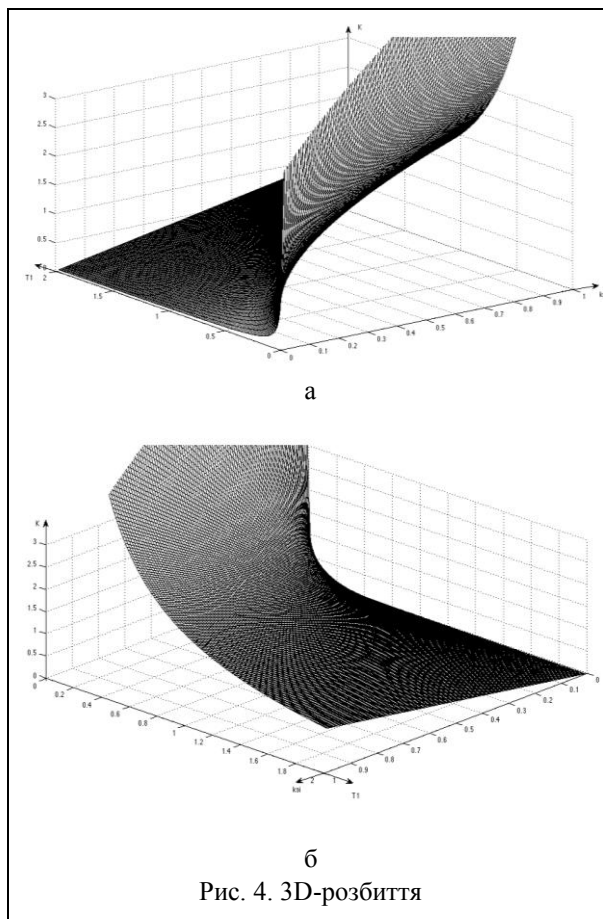


Рис. 4. 3D-розбиття

Розглянуто приклад побудови області стійкості на площині та у просторі трьох параметрів за допомогою інженерного пакету MATLAB.

## Список літератури

1. Репнікова Н.Б. Теорія автоматичного керування: класика і сучасність: підруч. / Н.Б. Репнікова. – К.: НТУУ “КПІ”, 2011. – 328 с. – 1000 пр. – ISBN 978-966-622-436-4.
2. Бессекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – М.: Профессия, 2003. – 752 с. – 5000 экз. – ISBN 5-3913-035-6.

Надійшла до редколегії 7.02.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук проф. С.Ф. Теленик, Національний технічний університет України “КПІ”, Київ.