

УДК 517.977.5

А.В. Писаренко

Національний технічний університет України "КПІ", Київ

## ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМ У ВИГЛЯДІ ГІПЕРСФЕРИ

Стаття присвячена задачі пошуку оптимального за швидкодією керування у випадку, коли воно належить гіперсфері деякого радіусу, що відповідає обмеженню за величиною. Рішення задачі виконано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна, що приводить до системи програмного керування, та за допомогою нерівності Коші-Буняковського-Шварца, що дозволяє отримати замкнуту систему зі зворотніми зв'язками. У статті наведено приклади рішення задачі, виконано моделювання систем керування у пакеті MATLAB/Simulink.

**Ключові слова:** оптимальність за швидкодією, принцип максимуму, нерівність КБШ.

### Вступ

Задачі оптимального за швидкодією керування є дуже розповсюдженими під час розробки автоматичних систем, оскільки час керування є важливим показником якості системи. Синтез керування, що забезпечує мінімально можливий час в умовах інтервальних обмежень, пов'язаний з пошуком лінії (поверхні) перемикання у фазовому просторі об'єкту.

Але досить часто виникають задачі, коли інтервальні обмеження не враховують особливостей реальної фізичної системи, наприклад, коли застосовується реактивний двигун зі змінюваним вектором тяги, так званий верньєрний. В такому випадку обмеження на величину керування математично представляють у вигляді гіперсфери. Задачі оптимального керування за швидкодією розглянуті у публікаціях таких авторів, як В.П. Колесника, Л.І. Розонера, Л.П. Смольнікова, В.В. Солодовникова, О.О. Колесникова, М. Атанса, П. Фалба та інших. При цьому питанням синтезу керування у мовах дії обмеження у вигляді гіперсфери присвячено небагато уваги.

Крім того, у багаточисельних публікаціях складно знайти задовільні приклади рішення таких задач і, тим більше, моделювання із застосуванням сучасних інженерних програмних пакетів.

Метою статті є дослідження методу оптимального за швидкодією керування консервативними системами із обмеженням у вигляді гіперсфери теоретично та за допомогою моделювання у програмному комплексі MATLAB/Simulink.

### Основна частина

Для врахування особливостей керування за допомогою реактивного двигуна зі змінюваним вектором тяги розглянемо область допустимих керувань  $\Omega(\mathbf{u})$ , що задана співвідношенням

$$\|\mathbf{u}(t)\| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_r^2(t)} \leq u^{\max}, \quad (1)$$

де  $\|\mathbf{u}(t)\|$  - фробеніусова норма, що дорівнює евклідовій довжині вектора  $\mathbf{u}(t)$ .

Введене обмеження означає, що вектор керування  $\mathbf{u}(t)$  повинен належати гіперсфері радіусу  $u^{\max}$  у  $r$ -мірному просторі та його компоненти залежать одна від одної.

Постановка задачі про оптимальну швидкодію при обмеженні керування гіперсферою.

Об'єкт керування задано лінійними рівняннями стану

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2)$$

а керування обмежене співвідношенням (1).

Відомий початковий стан  $\mathbf{x}(0)$ . Необхідно знайти таке керування  $\mathbf{u}(t)$ , що переводить об'єкт в початок координат  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  за мінімально можливий час, тобто  $T \rightarrow \min_{\|\mathbf{u}(t)\| \leq u^{\max}}$ .

Скористаємося принципом максимуму Понтрягіна. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \mathbf{p}^T(t)\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (3)$$

Від керування залежить тільки останній доданок у (3). Це скалярний добуток двох векторів:  $\mathbf{p}^T(t)\mathbf{B}$  розмірності  $1 \times r$  та  $\mathbf{u}(t)$  розмірності  $r \times 1$ .

Як відомо, скалярний добуток двох векторів виражається співвідношенням

$$\mathbf{p}^T(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \|\mathbf{p}^T(t)\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{u}(t)\| \cdot \cos \varphi, \quad (4)$$

де  $\|\cdot\|$  - довжина (фробеніусова норма) вектору,  $\varphi$  - кут між векторами.

Таким чином, для того, щоб гамільтоніан (3) був максимальним за  $\mathbf{u}(t)$ , необхідно щоб скаляр-

ний добуток  $\mathbf{p}^T(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  був максимальним за абсолютною величиною та додатнім. Це справедливо у випадку коли  $\cos\varphi=1$ , тобто вектори колінеарні, а довжина вектору  $\mathbf{u}(t)$  максимально допустима, тобто відповідно до (1)

$$\|\mathbf{u}(t)\| = u^{\max}. \quad (5)$$

Вказаний напрямок вектору  $\mathbf{u}(t)$  можна забезпечити через одиничний вектор, що має той самий напрямок, що і вектор  $\mathbf{p}^T(t)\mathbf{B}$ , а саме

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t)}{\|\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t)\|}. \quad (6)$$

Таким чином, остаточно

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(t) &= u^{\max} \hat{\mathbf{e}} \Leftrightarrow \\ \bar{\mathbf{u}}(t) &= u^{\max} \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t)}{\|\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t)\|}, \quad \|\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t)\| \neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

На основі отриманого виразу для оптимального за швидкістю керування можна зробити висновок, що компоненти вектора керування  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  безперервні за часом, що обумовлено безперервністю функцій вектору  $\mathbf{p}(t)$ . Це відрізняє керування оптимальне за швидкістю, обмежене гіперсферою, від керування, обмеженого гіперкубом, коли воно є кусково-постійною функцією. Отже, якщо керування  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  безперервне, то й оптимальна траєкторія  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  не має зламів і, очевидно, у фазовому просторі таке поняття як лінія перемикавання відсутнє. Відповідно до цього, розв'язання поставленої задачі за допомогою фазового простору, щоб отримати залежність керування від змінних стану і, відповідно, замкнуту систему зі зворотніми зв'язками не має сенсу.

Невідомі компоненти вектору  $\mathbf{p}(t)$  знаходять з системи спряжених рівнянь

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t). \quad (8)$$

У якості прикладу розглянемо консервативну систему, що являє собою модель тіла, що обертається, з однією віссю симетрії [1]. Особливістю керування обертанням такого тіла, коли обмеження на керуючі впливи мають вигляд (1), є застосування верньєрного реактивного двигуна, який закріплено як показано на рис. 1.

Нехай кутові швидкості обертання навколо осей  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ . Вісь 3 є віссю симетрії, отже моменти інерції відносно осей 1 і 2 рівні:  $J = J_1 = J_2$ , момент інерції відносно осі 3 позначимо  $J_3$ .

Система диференціальних рівнянь, що описує систему:

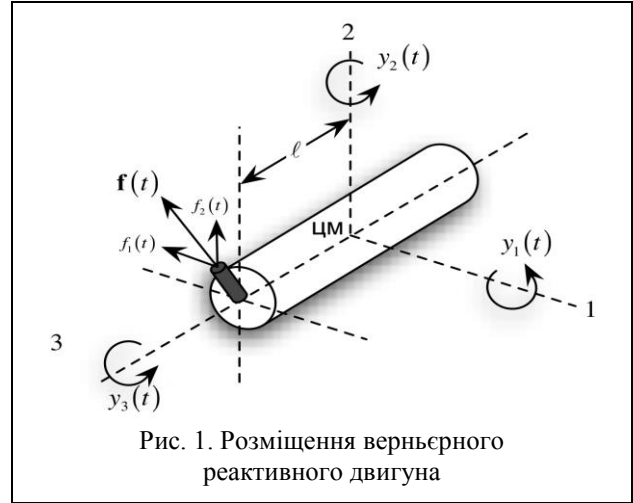


Рис. 1. Розміщення верньєрного реактивного двигуна

$$\begin{cases} J\dot{y}_1(t) = (J - J_3)y_2(t)y_3(t), \\ J\dot{y}_2(t) = (J_3 - J)y_1(t)y_3(t), \\ J_3\dot{y}_3(t) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

З останнього рівняння  $y_3(t) = \text{const} = c_3$ . Якщо прийняти  $\omega = \frac{(J - J_3)c_3}{J}$ , та розглядати кутові моменти  $x_1(t) = Jy_1(t)$ ;  $x_2(t) = Jy_2(t)$  замість кутових швидкостей, то система диференціальних рівнянь (9) матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t). \end{cases} \quad (10)$$

Верньєрний реактивний двигун може обертатися у площині, що перпендикулярна до осі 3, тому вектор його тяги  $\mathbf{f}(t)$  має компоненти-проекції на осі 1 та 2:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Вектор тяги обмежений за величиною виразом

$$\|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \leq F. \quad (12)$$

Введемо поняття кутового моменту, що створюється силою тяги двигуна:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell f_1(t) \\ \ell f_2(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Відповідно, прикладаючи момент до тіла, рівняння його руху (10) приймуть вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t) + u_2(t). \end{cases} \quad (14)$$

Тоді обмеження (12) з урахуванням (13) запишеться як

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t)\| &= \sqrt{\frac{u_1^2(t)}{\ell^2} + \frac{u_2^2(t)}{\ell^2}} = \frac{1}{\ell} \|\mathbf{u}(t)\| \leq F \Rightarrow \\ \|\mathbf{u}(t)\| &= \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \leq \ell F. \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо рішення поставленої задачі на прикладі.

Задано об'єкт керування рівняннями стану

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u_2(t). \end{cases}$$

Початковий стан  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ . Необхідно знайти

керування, оптимальне за швидкодією, яке переводить об'єкт з заданого початкового стану у стан спокою  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  за мінімальний час. Керування

обмежено співвідношенням  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq 1$ .

Матриці об'єкту:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Гамільтоніан відповідно до (3):

$$H = p_1(t)(x_2(t) + u_1(t)) + p_2(t)(-x_1(t) + u_2(t)).$$

Для стислості, аргументи функцій часу опустимо. Отже, за формулою (7), оптимальне керування визначається як

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{\max} \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{p}}{\|\mathbf{B}^T \mathbf{p}\|}.$$

Знайдемо: 
$$\mathbf{B}^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

$$\|\mathbf{B}^T \mathbf{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

Тоді остаточно, компоненти вектора керування матимуть вигляд

$$\bar{u}_1 = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad \bar{u}_2 = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}.$$

Для визначення невідомих функцій  $p_1(t), p_2(t)$  складемо систему спряжених рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2, \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1. \end{cases}$$

розв'язками якої є наступні функції:

$$p_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

$$p_2(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t.$$

З урахуванням цього, величини оптимальних за швидкодією керувань

$$\bar{u}_1 = \frac{C_1 \sin t + C_2 \cos t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$

$$\bar{u}_2 = \frac{C_1 \cos t - C_2 \sin t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}.$$

Для знаходження невідомих констант необхідно отримати вирази для керувань підставити у рівняння станів об'єкту та розв'язати їх з граничними умовами. Отже маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \frac{C_1 \sin t + C_2 \cos t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \frac{C_1 \cos t - C_2 \sin t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \end{cases}$$

розв'язання якої виконаємо у пакеті MATLAB. Послідовність дій представлена на рис. 2.

```
>> [x1 x2]=dsolve('Dx1=x2+(C1*sin(t)+C2*cos(t))/sqrt(C1^2+C2^2)', 'Dx2=-x1+(C1*cos(t)-C2*sin(t))/sqrt(C1^2+C2^2)')
x1 =
sin(t)*(C4 + (C1*t)/(C1^2 + C2^2)^(1/2)) + cos(t)*(C3 + (C2*t)/(C1^2 + C2^2)^(1/2))
x2 =
cos(t)*(C4 + (C1*t)/(C1^2 + C2^2)^(1/2)) - sin(t)*(C3 + (C2*t)/(C1^2 + C2^2)^(1/2))
```

Рис. 2. Розв'язання системи диференціальних рівнянь у MATLAB

Отже розв'язки системи:

$$x_1(t) = \sin t \left( C_4 + \frac{C_1 t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right) +$$

$$+ \cos t \left( C_3 + \frac{C_2 t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right),$$

$$x_2(t) = \cos t \left( C_4 + \frac{C_1 t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right) -$$

$$- \sin t \left( C_3 + \frac{C_2 t}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right).$$

Використаємо граничні умови задачі.

$$\begin{cases} \sin T \left( 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} + C_1 T \right) + \\ + \cos T \left( -2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} + C_2 T \right) = 0; \\ \cos T \left( 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} + C_1 T \right) - \\ - \sin T \left( -2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} + C_2 T \right) = 0. \end{cases}$$

Система містить два рівняння з трьома невідомими  $C_1, C_2, T$ .

Третє рівняння, оскільки маємо задачу з нефіксованим часом керування, отримаємо з умови, рів-

ності нулю максимуму гамільтоніану в кінцевий момент часу, тобто

$$\max_{\mathbf{u}(t)} H(\mathbf{x}(T), \mathbf{p}(T), \mathbf{u}(T)) = 0.$$

В нашому випадку

$$\max_{\mathbf{u}(t)} H = (C_1 \sin T + C_2 \cos T)(x_2(T) + u_1(T)) + (C_1 \cos T - C_2 \sin T)(-x_1(T) + u_2(T)) = 0.$$

Підставляючи відповідні величини, після перетворень приходимо до рівняння

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2}(\sin T(C_1 - C_2) + \cos T(C_1 + C_2)) + C_1^2 + C_2^2 = 0.$$

Отримана система рівнянь є системою нелінійних алгебраїчних рівнянь, яку будемо розв'язувати чисельними методами за допомогою MATLAB.

Спочатку задаємо рівняння системи у m-файлі (рис. 3). Елементи вектору  $\mathbf{c}$  відповідають наступним невідомим:

$$\mathbf{c}(1) = C_1, \mathbf{c}(2) = C_2, \mathbf{c}(3) = T.$$

У командному рядку MATLAB застосовуємо функцію `fsolve` для розв'язання системи (рис. 3).

Таким чином,

$$C_1 = -0.0066, C_2 = 0.0066, T = 2.8288c.$$

Остаточно, вирази для оптимальних керуючих впливів

$$\bar{u}_1(t) = -0.7097 \sin t + 0.7097 \cos t,$$

$$\bar{u}_2(t) = -0.7097 \cos t - 0.7097 \sin t.$$

Оскільки отримані вирази для керування є функціями часу, то оптимальна система буде системою програмного керування без зворотних зв'язків. Модель системи оптимальної за швидкодією було розроблено у пакеті MATLAB/Simulink (рис. 4).

Керування вимикається в момент досягнення нульового кінцевого стану за допомогою підсистеми `Control off`. Результати моделювання представлені на рис. 5: залежність станів об'єкту від часу, керування від часу та оптимальна траєкторія відповідно.

```
function F = fastsystem(c)
F = [ sin(c(3))*(2*sqrt(c(1)^2+c(2)^2)+c(1)*c(3))+cos(c(3))*(-2*sqrt(c(1)^2+c(2)^2)+c(2)*c(3));
      cos(c(3))*(2*sqrt(c(1)^2+c(2)^2)+c(1)*c(3))-sin(c(3))*(-2*sqrt(c(1)^2+c(2)^2)+c(2)*c(3));
      sqrt(c(1)^2+c(2)^2)*(sin(c(3))*(c(1)-c(2))+cos(c(3))*(c(1)+c(2)))+c(1)^2+c(2)^2];

>> c=fsolve(@fastsystem, [-1 2 3])
c =
-0.0066    0.0066    2.8288
```

Рис. 3. Розв'язок системи нелінійних рівнянь

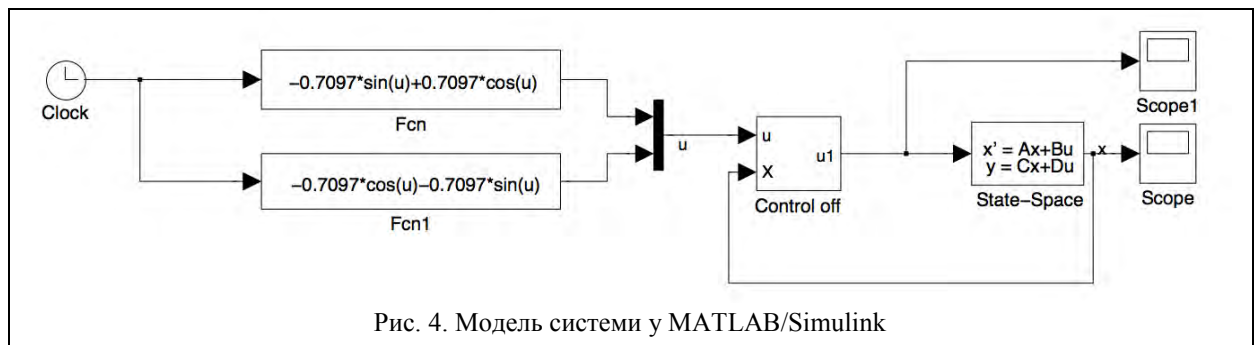


Рис. 4. Модель системи у MATLAB/Simulink

Необхідно підкреслити, що отримані графіки керувань ілюструють їх безперервність у часі, та підпорядковуються введеному обмеженню. Оптимальна траєкторія, як зазначалося вище, не має зламів. Час досягнення заданого кінцевого стану спокую відповідає розрахованому вище аналітично.

З точки зору практичної реалізації, системи програмного керування мають ряд недоліків, а саме: неточності моделі об'єкту та відсутність інформації про систему за відсутності зворотних зв'язків може привести до відхилення реальних процесів в об'єкті керування від очікуваних. Тому застосовуємо наступний підхід, аби знайти керування як функцію станів системи,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ .

*Постановка задачі.*

Задано об'єкт керування рівняннями стану (2).

Розмірність вектору керувань  $\mathbf{u}(t)$  та вектору стану  $\mathbf{x}(t)$  однакова і дорівнює  $[n \times 1]$ .

Керування обмежене відповідно до (1).

Початковий стан об'єкту відомий,  $\mathbf{x}(0)$ .

Необхідно знайти керування, як функцію станів  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ , що переводить об'єкт в початок координат  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  за мінімальний час:

$$T \rightarrow \min_{\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| \leq u^{\max}}$$

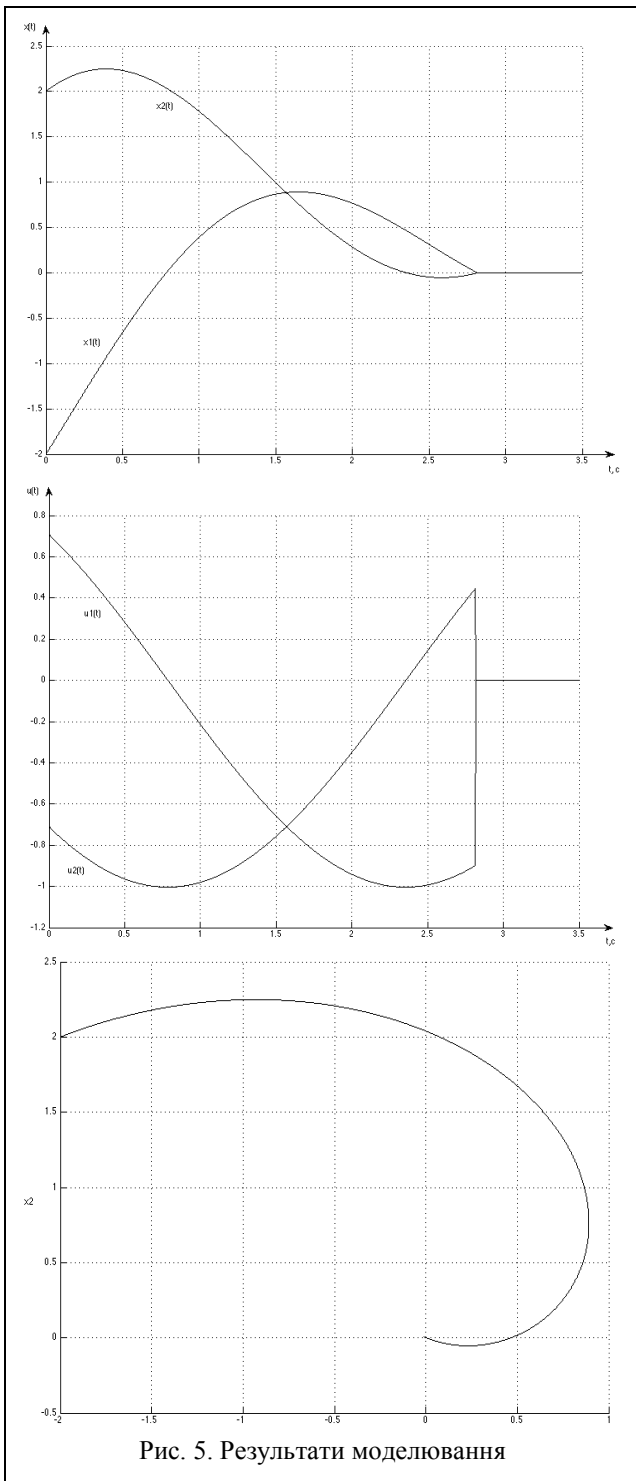


Рис. 5. Результати моделювання

Розглянемо норму  $\|\mathbf{x}(t)\|$ . Зрозуміло, що в початковий момент  $\|\mathbf{x}(0)\|$ , а у кінцевий  $\|\mathbf{x}(T)\| = 0$ , оскільки кінцевий стан є початком координат.

На цьому етапі постановка задачі змінюється.

Задано об'єкт керування рівняннями стану (2). Керування обмежене відповідно до (1). Необхідно знайти таке керування  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ , що зменшить норму  $\|\mathbf{x}(t)\|$  від початкового значення  $\|\mathbf{x}(0)\|$  до нуля  $\|\mathbf{x}(T)\| = 0$  за мінімально можливий час.

Запишемо швидкість зміни норми  $\|\mathbf{x}(t)\|$  у часі, що відповідає похідній за часом від довжини вектора  $\mathbf{x}(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) x_i(t) = \dots \quad (16) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}. \end{aligned}$$

Підставимо (2) у (16).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\| &= \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x}(t))^T \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} + \frac{\mathbf{u}^T(t) \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} = \dots \quad (17) \\ &= \frac{\mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} + \frac{\mathbf{u}^T(t) \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}. \end{aligned}$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку, що встановлює залежність  $\|\mathbf{x}(t)\|$  від керування  $\mathbf{u}(t)$ .

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} z(t) &= \|\mathbf{x}(t)\|, \\ a(z(t)) &= \frac{\mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}^T \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}, \quad (18) \\ v(t) &= \frac{\mathbf{u}^T(t) \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (17) матиме вигляд

$$\dot{z}(t) = a(z(t)) + v(t), \quad (19)$$

де  $z(0) = \|\mathbf{x}(0)\| > 0$ ,  $z(T) = \|\mathbf{x}(T)\| = 0$ .

Оскільки для нелінійної системи першого порядку (19) величина  $v(t)$  є керуванням, тому на нього необхідно накласти обмеження. Знайдемо модуль  $v(t)$ .

$$|v(t)| = \left| \frac{\mathbf{u}^T(t) \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right|. \quad (20)$$

Відповідно до нерівності Коші-Буняковського-Шварца ("нерівність КБШ"), модуль скалярного добутку двох векторів задовольняє наступній нерівності:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|. \quad (21)$$

Тоді (20) представимо як

$$|v(t)| = \left| \frac{\mathbf{u}^T(t) \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right| \leq \|\mathbf{u}^T(t)\| \cdot \left\| \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \right\|. \quad (22)$$

Оскільки  $\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$  – одиничний вектор і

$\|\hat{e}\| = 1$ , а  $\|\mathbf{u}^T(t)\| = \|\mathbf{u}(t)\| = u^{\max}$ , то (22) матиме вигляд

$$|v(t)| \leq u^{\max}. \quad (23)$$

Отримане обмеження (23) привело нас до задачі про оптимальну швидкодію при обмеженні на керування у вигляді гіперкубу.

Тут постановка задачі знову змінюється.

Задано нелінійний об'єкт керування першого порядку рівнянням (19). Керування обмежене відповідно до (23).

Необхідно знайти таку функцію  $v(t)$ , що переведе об'єкт керування з початкового стану  $z(0)$  у кінцевий стан  $z(T) = 0$  за мінімальний час.

Розв'язок цієї постановки задачі знайдено у [1] і ми наведемо його без доведення. Оптимальне за швидкодією керування має вигляд

$$\bar{v}(t) = -u^{\max} \text{sign}\{z(t)\}. \quad (24)$$

Оскільки, з першого рівняння (18) та означення норми  $z(t) = \|\mathbf{x}(t)\| > 0$ , то (24) перепишемо як

$$\bar{v}(t) = -u^{\max}. \quad (25)$$

З урахуванням позначення (18) та виразу (25)

$$\bar{v}(t) = \frac{\bar{\mathbf{u}}^T(t)\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} = -u^{\max}. \quad (26)$$

Таким чином, скалярний добуток вектору  $\bar{\mathbf{u}}^T(t)$  та одиничного вектору  $\hat{e} = \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$  дорівнює

максимально допустимій довжині вектору  $\bar{\mathbf{u}}^T(t)$  зі знаком мінус. Це означає, що вектор оптимального керування  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  для об'єкту (2) повинен мати мак-

симальну довжину  $u^{\max}$  та напрямок, протилежний до напрямку вектору стану  $\mathbf{x}(t)$ . Математично, з рівняння (26), отримуємо розв'язок задачі оптимального керування лінійним об'єктом при обмеженні у вигляді гіперсфери.

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -u^{\max} \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}. \quad (27)$$

Розв'яжемо той самий приклад, що розглядався вище. За формулою (27) можемо відразу записати оптимальне керування. У векторній формі:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -1 \cdot \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}.$$

У скалярному вигляді:

$$\bar{u}_1(t) = -\frac{x_1(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}, \quad \bar{u}_2(t) = -\frac{x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}.$$

Переходимо до моделювання.

Модель оптимальної за швидкодією системи керування представлена на рис. 6.

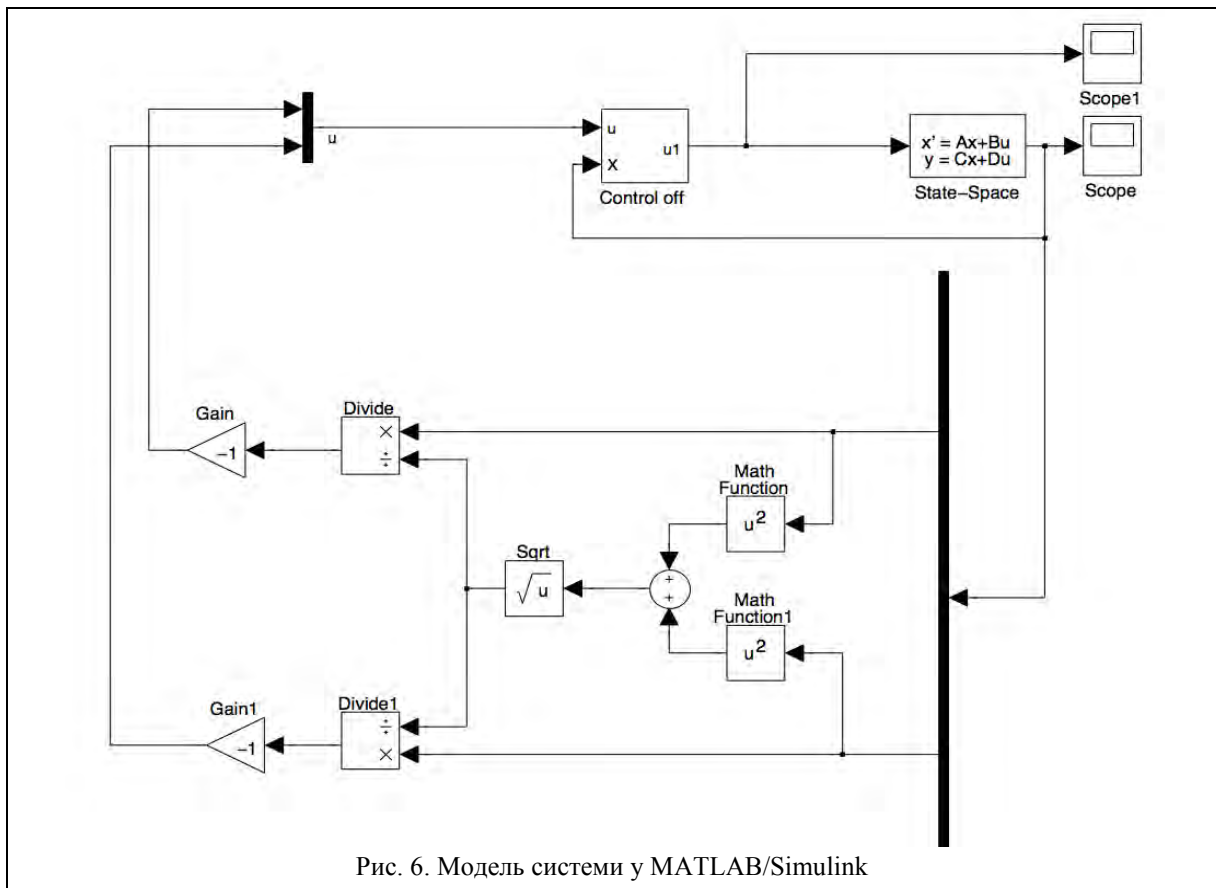


Рис. 6. Модель системи у MATLAB/Simulink

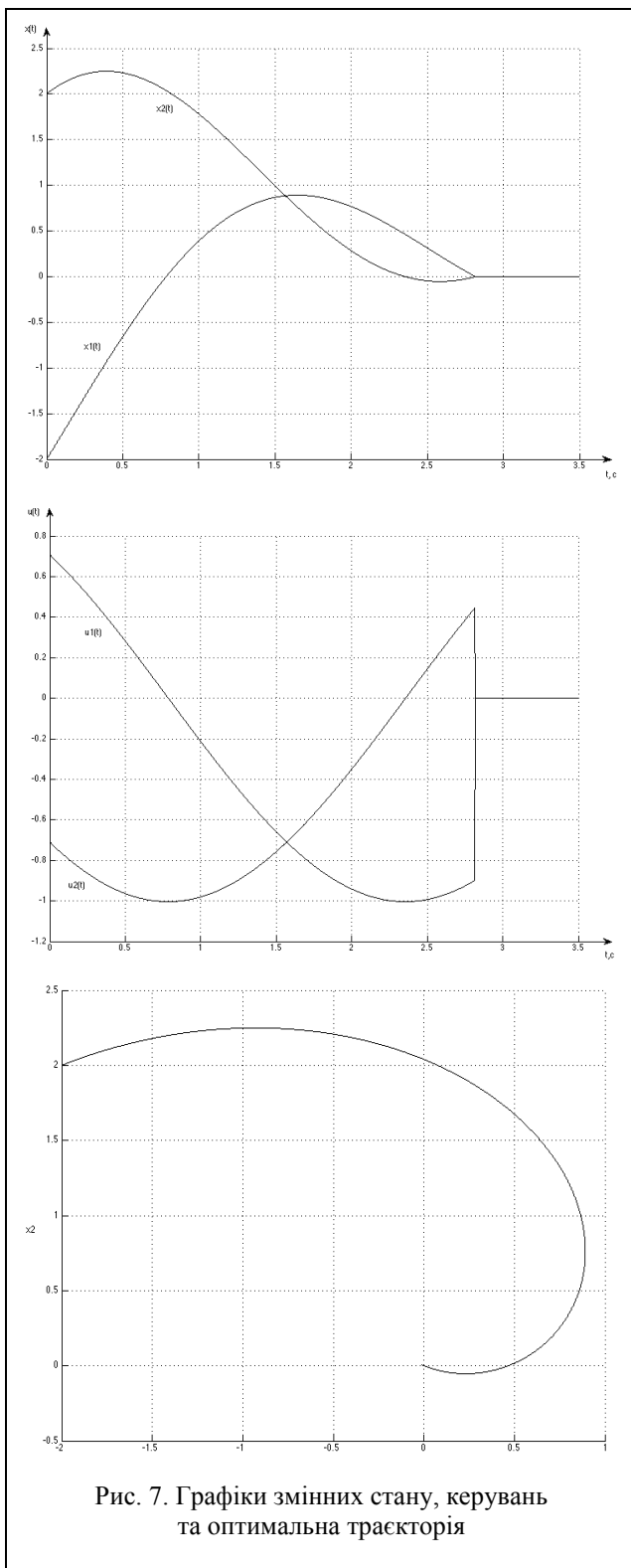


Рис. 7. Графіки змінних стану, керувань та оптимальна траєкторія

Кожна змінна стану об'єкту керування ділиться на квадратний корінь від суми квадратів станів. У момент досягнення початку координат керування вимикається підсистемою Controll off.

Графіки зміни  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  та фазова траєкторія наведені на рис. 7.

Нескладно помітити, що останні графіки абсолютно співпадають з відповідними графіками отриманими вище, що свідчить про справедливість обох підходів до рішення задачі: системи програмного керування та зі зворотними зв'язками за станами.

### Висновки

У статті виконано дослідження методу оптимального за швидкістю керування об'єктом, при наявності обмеження на величину керуючих впливів у вигляді гіперсфери. Поставлену задачу розв'язано за допомогою принципу максимуму та нерівності КБШ. У першому випадку отримано систему програмного керування, а у другому – зі зворотними зв'язками за станами. Виконано комп'ютерне моделювання обох рішень і показано їх відповідність одне одному та умовам задачі.

### Список літератури

1. Атанс М. *Оптимальное управление* / М. Атанс, П.Л. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968, – 764 с.
2. *Теория оптимизации систем автоматического управления* / Под ред. К.А. Пупкова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
3. Чураков Е.П. *Оптимальные и адаптивные системы* / Е.П. Чураков. – М.: Энергоиздат, 1987. – 256 с.

Надійшла до редколегії 7.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук проф. П.І. Бідюк, Національний технічний університет України "КПІ", Київ.

### ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ГИПЕРСФЕРЫ

А.В. Писаренко

Статья посвящена задаче поиска оптимального по быстродействию управления в случае, когда оно принадлежит гиперсфере некоторого радиуса, что соответствует ограничению по величине. Решение задачи выполнено с помощью принципа максимума Понтрягина, который приводит к системе программного управления, и с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца, которое позволяет получить замкнутую систему с обратными связями. В статье приведены примеры решения задачи, выполнено моделирование систем управления в пакете MATLAB/Simulink.

**Ключевые слова:** оптимум по быстродействию, принцип максимума, неравенство КБШ.

### TIME OPTIMAL CONTROL UNDER FORM OF HYPERSPHERE CONSTRAINTS

A.V. Pisarenko

The article is devoted to the problem of finding time optimal control when it belongs to hypersphere, which accords to the value constrain. Solution of the problem made by the Pontryagin maximum principle, which leads to a system software management, and by the Cauchy-Schwarz inequality, which allows to obtain a closed loop system with feedbacks. The article provides examples of solving the problem and simulation of control systems in MATLAB / Simulink.

**Keywords:** optimum on a fast-acting, principle of maximum, inequality of CS.