УДК 519.854

И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

АНАЛИЗ КАТЕГОРНЫХ ДИАГРАММ И АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ КАК БАЗЫ ПРЕДИКАТНОЙ КАТЕГОРИИ

Рассматривается задача анализа классической категории и ее модификации – предикатной категории, которая предоставляет бо́льшие возможности для приложений теории категорий в области компьютеризации и информатизации. В частности, предикатная категория является хорошей формальной базой для построения высокопроизводительных мозгоподобных компьютеров параллельного действия. В данной, второй части работы, рассмотрены категорная диаграмма и необходимый в контексте исследования аппарат алгебры конечных предикатов.

Ключевые слова: *категорная диаграмма, алгебра предикатов, предикатная категория.*

Вступление

В работе [1] были рассмотрены классическая абстрактная категория, безобъектная категория и категория с объектами. Данная статья посвящена продолжению построения и исследования предикатной категории, здесь рассматриваются категорные диаграммы и алгебра предикатов.

Категорная диаграмма

Каждой паре (A, B) объектов $A, B \in \mathrm{ObK}$ ставится в соответствие некоторое, быть может и пустое, множество $H_K(A, B)$ морфизмов категории K. Возможен случай, когда многим разным морфизмам, например, f, g, h, поставлена в соответствие одна и та же пара объектов (A, B), то есть $f, g, h : A \to B$. Такие морфизмы называются *параллельными.* А для какой-то другой пары объектов (C, D) в категории K вообще может не найтись ни одного морфизма f, такого что $f : C \to D$. Вместо записи $H_K(A, B)$ также используются обозначения $\mathrm{Hom}_K(A, B)$, $\mathrm{Mor}_K(A, B)$, $K(A, B)$, а если это не приводит к двусмысленности, – то и более лаконичные записи $H(A, B)$, $\mathrm{Hom}(A, B)$, $\mathrm{Mor}(A, B)$. Вместо записи $f \in H_K(A, B)$ иначе пишут $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Вместо выражений «объект $A \in \mathrm{ObK}$» и «морфизм $f \in \mathrm{MorK}$» пишут «объект $A \in K$» и «морфизм $f \in K$» или еще проще: «K – объект A» и «K – морфизм f». Для каждого морфизма $f \in \mathrm{MorK}$ существует единственная пара объектов A и B, такая, что $A, B \in \mathrm{ObK}$ и $f \in H_K(A, B)$. Приписывание этого свойства морфизмам мотивируется тем, что при их интерпретации для каждой функции f естественно указывать ее область определения A и область значений B, иначе определение функции будет незавершенным. Пишут $A = \mathrm{dom} f$ (начало морфизма; в принятой нами интерпретации – его область определения), $B = \mathrm{cod} f$ (конец морфизма; в нашей интерпретации – его область значений).

Запишем определение классической категории с объектами. Оно выделено жирным шрифтом. Категория с объектами K состоит из множества морфизмов MorK и множества объектов ObK. Предполагается, что множества MorK и ObK не пересекаются. Категория с объектами K характеризуется следующими пятью свойствами:

1) Каждой паре K-объектов A, B соответствует множество $H_K(A, B)$ морфизмов (быть может, даже пустое), включенное в MorK.

2) Для каждого морфизма $f \in \mathrm{MorK}$ существует единственная пара A, B K-объектов, такая что $f \in H_K(A, B)$.

3) В множестве MorK определено, вообще говоря частичное, однозначное соответствие – умножение морфизмов; произведение fg морфизмов $f : A \to B$ и $g : C \to D$ определено лишь в тех случаях, когда $B = C$, то есть когда конец морфизма f совпадает с началом морфизма g. В этом случае произведение fg есть K-морфизм из объекта A в объект D. Иначе говорят, что для объектов $A, B, C \in K$ определено отображение $H_K(A, B) \times H_K(B, C) \to H_K(A, C)$. Знак $\times$ в данном случае обозначает декартово произведение множеств морфизмов. Морфизмы f, g категории K вида $f : A \to B$ и $g : B \to C$ называются последовательными, а вида $f : A \to B$ и $g : A \to B$ – параллельными.

4) Умножение морфизмов ассоциативно $(fg)h = f(gh)$ всякий раз, когда морфизмы $(fg)h$ и $f(gh)$ существуют. Иными словами, ассоциатив-

© И.А. Лещинская

ность справедлива всякий раз, когда $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$. Таким образом, ассоциативность выполняется во всех тех случаях, когда она имеет смысл. Равенство $(fg)h = f(gh)$ выражает категорный закон ассоциативности.

Закон ассоциативности можно наглядно выразить графически в виде категорной диаграммы, изображенной на рис. 1.

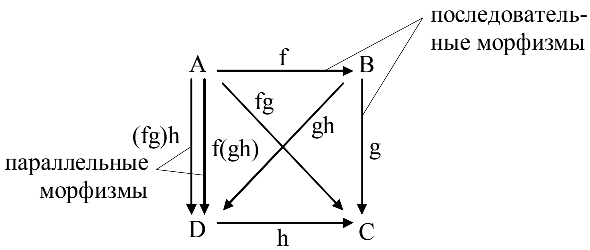

Рис. 1. Категорная диаграмма

Любая категорная диаграмма образуется из объектов и стрелок (морфизмов), она представляет собой ориентированный граф с раскрашенными вершинами и дугами. В роли вершин графа в категорной диаграмме выступают объекты категории, а в роли дуг – ее морфизмы. Такого вида диаграммы широко используются в теории категорий. Они – главное средство наглядного представления внутреннего строения и свойств математических структур, связей между ними. Диаграмма, выражающая категорный закон ассоциативности, характеризует связи между любыми объектами A, B, C, D и морфизмами f, g, h. Эти связи выражают существо закона ассоциативности. В данном случае с помощью категорной диаграммы мы выразили один из законов теории категорий.

Категорные диаграммы делятся на *замкнутые* и разомкнутые. Разомкнутые диаграммы выражают формулы категорной алгебры, замкнутые – ее равенства. Диаграмма, выражающая категорный закон ассоциативности, относится к числу замкнутых. Замкнутые диаграммы называются иначе коммутативными. Коммутативные диаграммы характеризуются тем, что результат действия морфизмов при их последовательном выполнении, указанном на диаграмме, получается одинаковым при движении по всевозможным путям диаграммы, если мы отправляемся от одной и той же точки диаграммы и приходим снова к одной и той же другой точке диаграммы. На языке коммутативных диаграмм выражаются общие связи между объектами и морфизмами. С помощью коммутативных диаграмм можно выражать свойства любых математических структур, даже законы самой теории категорий. Категорные диаграммы делятся на общие и частные. Общие диаграммы коммутативны для всех объектов и морфизмов данной категории. Общими коммутативными диаграммами выражаются свойства какой-либо конкретной категории. Частные категорные диаграммы относятся к конкретным объектам и морфизмам данной категории. Они выражают связи между ними и могут быть как замкнутыми, так и разомкнутыми. На рис. 2 приведен пример разомкнутой категорной диаграммы.

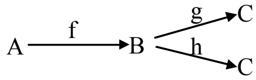

Рис. 2. Разомкнутая категорная диаграмма

В последние годы приобрело большую популярность объектное моделирование, в котором в качестве основного инструмента используются диаграммы, похожие на частные категорные диаграммы. Они тоже строятся из объектов и стрелок. С их помощью описывается архитектура информационных систем. Частным категорным диаграммам противостоят общие, с их помощью описываются закономерности функционирования информационных систем. На теорию категорий можно смотреть как на учение о категорной алгебре, которая задана на носителе MorK. На нем введены базисные элементы в виде тождественных морфизмов и базисные операции – умножение морфизмов. Категорная алгебра определена не полностью. В ней выделены лишь самые главные черты, а дорисовать ее можно различными способами. Категорная алгебра в этом похожа на булеву алгебру: это не одна, а целое семейство различных экземпляров категорных алгебр. Диаграмма, составленная из объектов и морфизмов некоторой категории, называется коммутативной, если произведение морфизмов вдоль любого пути по стрелкам диаграммы зависит только от начала и конца пути.

Можно говорить о формулах, тождествах и уравнениях категорной алгебры, с помощью которых можно аналитически описывать категорные диаграммы. Замкнутые категорные диаграммы бывают двух видов – общие и частные. Общие описываются тождествами категорной алгебры, а частные – ее уравнениями. Примером общей замкнутой категорной диаграммы может служить диаграмма, выражающая закон ассоциативности $(fg)h = f(gh)$. Слева и справа от знака равенства стоят формулы категорной алгебры. Примером уравнения категорной алгебры может служить равенство $fx = f$, где f – фиксированный морфизм. Этому уравнению удовлетворяет лишь один из единичных морфизмов $x = e$ данной категории ($fe = f$). Разомкнутым категорным диаграммам соответствуют формулы категорной алгебры или системы таких формул. Например, диаграмме, изображенной на рис. 3, соответствует система формул fg и fh.

Для каждого объекта $B \in K$ существует морфизм $e_B : B \to B$ (рис. 3), называемый единичным или тождественным морфизмом объекта B, такой, что $fe_B = f$ и $e_B g = g$ для любых морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тождества $fe_B = f$ и $e_B g = g$ называются категорными законами тождества. Они выражаются следующей коммутативной диаграммой тождества.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "e"] \arrow[dr, "g"] & \\ & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Рис. 3. Категорная диаграмма с тождественным морфизмом

Для морфизмов $f, g \in \mathrm{Mor}K$ произведение fg существует в том и только том случае, когда f, g – последовательные морфизмы категории K.

Алгебра предикатов

Далее кратко охарактеризуем алгебру предикатов [2], то есть именно ту алгебру, в терминах которой мы будем в дальнейшем интерпретировать понятие категории. Возьмем какое-нибудь непустое множество U, элементы которого называются предметами. Само же множество U называется универсумом предметов. Возьмем, далее, набор из m каких-нибудь необязательно различных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_m$ универсума U.

Декартово произведение $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ называется предметным пространством S с координатными предметными осями $A_1, A_2, ..., A_m$ над универсумом U. Число осей m называется размерностью пространства S. Вводим множество $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ различных переменных $x_1, x_2, ..., x_m$, которые называются предметными переменными пространства S. Множество V называется универсумом переменных пространства S. Значениями переменной x_i ($i = \overline{1, m}$) служат элементы множества A_i, так что $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$.

Множества $A_1, A_2, ..., A_m$ называются областями изменения переменных $x_1, x_2, ..., x_m$.

Если $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_m \in A_m$ и $x_1 = a_1, x_2 = a_2, ..., x_m = a_m$, то пишут $(a_1, a_2, ..., a_m) \in S$ и говорят, что предметный вектор $(a_1, a_2, ..., a_m)$ принадлежит пространству $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$. Элементы $a_1, a_2, ..., a_m$ вектора $(a_1, a_2, ..., a_m)$ называются его компонентами (первым, вторым,…, m-м).

Предметное пространство S можно рассматривать как совокупность всех векторов вида $(x_1, x_2, ..., x_m)$, компоненты которых удовлетворяют условию $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$. Любое подмножество P пространства S называется отношением, образованным в (или иначе: заданным на) пространстве S. Отношение имеет размерность m. Говорят, что оно m-местно. Отношения, заданные на одном и том же пространстве S, называются однотипными. Тип отношения определяется набором переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ и набором множеств $A_1, A_2, ..., A_m$. Отношение $\varnothing$, не содержащее ни одного вектора, называется пустым, отношение S, в котором имеются всевозможные векторы, – полным.

Предикатом, заданным на декартовом произведении $A_1, A_2, ..., A_m$, называется любая функция $P(x_1, x_2, ..., x_m) = o$, отображающая декартово произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ в множество $\Sigma = \{0, 1\}$. Символы 0 и 1 называются булевыми элементами, Σ – множество всех булевых элементов. Переменная $\xi = \{0,1\}$, являющаяся значением предиката P, называется булевой. Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ на $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ называется конечным, если все множества $A_1, A_2, ..., A_m$ конечны, и бесконечным – в противном случае. Эта же терминология переносится и на отношения, соответствующие предикатам. Переменные $x_1, x_2, ..., x_m$ называются аргументами предиката P.

Пусть L – множество всех отношений на S, M – множество всех предикатов на S. Между всеми отношениями множества L и всеми предикатами множества M, заданными на S, существует взаимно однозначное соответствие. Отношение P из L и предикат P из M называются соответствующими друг другу, если при любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_m) \in P, \\ 0, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_m) \notin P. \end{cases}$$

Обратный переход от предиката P к отношению P осуществляется по правилу:

если $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$, то $(x_1, x_2, ..., x_m) \in P$;

если $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$, то $(x_1, x_2, ..., x_m) \notin P$.

Множество всех векторов $(x_1, x_2, ..., x_m)$, удовлетворяющих уравнению $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$, образует отношение P, которое называется областью истинности предиката P. Предикат $P \in M$ называется характеристической функцией отношения $P \in L$. Алгеброй предикатов называется любая алгебра, заданная над носителем М. Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над предикатами определяются следующими равенствами: для любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, ..., x_m) =$$
$$= P(x_1, x_2, ..., x_m) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_m);$$
$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, ..., x_m) =$$
$$= P(x_1, x_2, ..., x_m) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_m);$$
$$(\neg P)(x_1, x_2, ..., x_m) = \neg(P(x_1, x_2, ..., x_m)).$$

Символы $\vee, \wedge, \neg$, стоящие слева от знака равенства, означают операции над предикатами, справа – операции над значениями предикатов, то есть над булевыми элементами.

Предикаты любого типа можно записывать в виде формул. Тип конечных предикатов задаем, указывая множества $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ и $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{k_i i}\}$, $i = \overline{1, m}$, k_i – число элементов в множестве A_i. Над носителем М вводим дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов. В роли базисных элементов этой алгебры используем предикаты 0 и 1, а также предикаты x_i^a узнавания предмета a по переменной $x_i, i = \overline{1, m}, a \in A_i$

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{если } x_i = a, \\ 0, \text{если } x_i \neq a. \end{cases}$$

Символ a в записи предиката x_i^a называется его показателем. В роли базисных операций в дизъюнктивно-конъюнктивной алгебре предикатов используются дизъюнкция и конъюнкция предикатов. Любой предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ в этой алгебре можно записать формулой в виде его совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ)

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \bigvee_{(a_1, a_2, ..., a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}.$$

Выражения вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$ называются конституэнтами единицы предиката P. Запись $(a_1, a_2, ..., a_m) \in P$ под знаком $\vee$ означает, что берётся дизъюнкция всех конституэнт единицы $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$, показатели сомножителей которой удовлетворяют условию $(a_1, a_2, ..., a_m) \in P$, где P – отношение, соответствующее предикату $P(x_1, x_2, ..., x_m)$. Это означает, что дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов полна, то есть что формулами этой алгебры можно записать любой предикат, а следовательно можно выразить аналитически любое отношение произвольного типа.

Выводы

В статье анализируется структура классической абстрактной категории с целью ее дальнейшей модификации в предикатную категорию. Рассмотрен необходимый для исследования категорной структуры аппарат алгебры конечных предикатов.

Список литературы

1. Лещинская И.А. Анализ безобъектной категории и категории с объектами для построения категорной алгебры [Текст] / И.А. Лещинская // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2015. – Вип. 4(129). С. 68-71.

2. Бондаренко М.Ф., Дударь З.В., Процай Н.Т., Черкашин В.В., Чикина В.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Алгебра предикатов и предикатных операций // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 80-86.

Поступила в редколлегию 17.02.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ф. Чалый, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

АНАЛІЗ КАТЕГОРНИХ ДІАГРАМ ТА АЛГЕБРИ ПРЕДИКАТІВ ЯК БАЗИ ПРЕДИКАТНОЇ КАТЕГОРІЇ

І.О. Лещінська

Розглядається задача аналізу класичної категорії та її модифікації - предикатної категорії, яка надає більші можливості для додатків теорії категорій в області комп'ютеризації та інформатизації. Зокрема, предикатна категорія є гарною формальної базою для побудови високопродуктивних мозкоподібних комп'ютерів паралельної дії. У даній, другій частини роботи, розглянуті категорна діаграма і необхідний в контексті дослідження апарат алгебри скінченних предикатів.

Ключові слова: *категорна діаграма, алгебра предикатів, предикатна категорія.*

ANALYSIS OF THE CATEGORICAL CHARTS AND PREDICATES ALGEBRA AS A BASIS OF PREDICATE CATEGORIES

I.A. Leschynskaya

The problem of analyzing the classical category and its modifications - predicate category, which offers more opportunities for applications of category theory in the field of computerization and information. In particular, the predicate category is a good formal basis for building high-performance brain-like computers parallel action. In this, the second part of the work, considered categorical chart and necessary in the context of the research the finite predicates algebra apparatus.

Keywords: *categorical diagram, predicates algebra, predicate category.*