

УДК 629.78.018

С.Д. Ставицький

ГП «Центральный научно-исследовательский институт навигации и управления», Киев

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОБХОДИМОГО И ДОСТАТОЧНОГО КОЛИЧЕСТВА ИЗМЕРЕНИЙ АППАРАТУРЫ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КА EGYPTSAT-1

*В статье обоснован выбор A-оптимального критерия планирования проведения навигационных измерений аппаратурой спутниковой навигации (АСН), представлен анализ результатов обработки экспериментальных данных.*

**Ключевые слова:** аппаратура спутниковой навигации, оптимальное планирование эксперимента

### Введение

**Постановка проблемы и анализ литературы.** Баллистико-навигационное обеспечение (БНО) управления полетом космических аппаратов (КА) является одним из основных факторов успешного выполнения задач спутника по целевому назначению. При этом точное, оперативное и надежное определение текущего и расчёт прогнозируемого положения КА в пространстве на основе обработки измерительной информации является важнейшей задачей БНО [1].

На борту КА EgyptSat-1 установлена аппаратура спутниковой навигации (АСН), приемник GPS, который предназначен для измерений текущих параметров движения (ПД) по сигналам спутниковой радионавигационной системы (СРНС) NAVSTAR. Эта информация используется при решении различных задач при проведении технологического цикла управления КА. В процессе эксплуатации спутника EgyptSat-1 определились проблемные вопросы, которые связаны с планированием включения АСН для обеспечения работы отдельных подсистем. В связи с этим актуальной является задача определения необходимого и достаточного количества измерений АСН.

**Целью данной статьи** является определение необходимого и достаточного количества измерений АСН для определения параметров движения КА.

### Основной материал

Процесс уточнения параметров движения КА по траекторным измерениям, в том числе и по измерениям АСН, базируется на основе применения метода максимума правдоподобия [2].

Исследуя полученную в ходе уточнения параметров движения КА ковариационную матрицу  $B_q = \sigma_0^2 C^{-1}$ , можно определить план измерений с точки зрения выбранного критерия оптимальности.

Приведём наиболее часто употребляемые критерии оптимальности планов проводимых измерений [2].

1. План  $u_{\text{опт}}$  называется D-оптимальным, если.

$$\det B_q(u_{\text{опт}}) = \min_u \det B_q(u), \quad \text{т.е.}$$

$$J(u) = \det B_q(u).$$

2. План  $u_{\text{опт}}$  называется A - оптимальным, если

$$\text{Sp } B_q(u_{\text{опт}}) = \min_u \text{Sp } B_q(u), \quad \text{т.е.}$$

$$J(u) = \text{Sp } B_q(u).$$

3. План  $u_{\text{опт}}$  называется E-оптимальным, если

$$\max_{\xi} \xi [B_q(u_{\text{опт}})] = \min_u \max_{\xi} \xi [B_q(u)], \quad \text{т.е.}$$

$$J(u) = \max_{\xi} \xi [B_q(u)],$$

где  $\xi [B_q(u)]$  - собственное значение ковариационной матрицы  $B_q[u]$ .

4. План  $u_{\text{опт}}$  называется G-оптимальным, если

$$\max_{\sigma_1^2} L^T B_q(u_{\text{опт}}) L = \min_u \max_{\sigma_1^2} L^T B_q(u) L, \quad \text{т.е.}$$

$$J(u) = \max_{\sigma_1^2} L^T B_q(u) L :$$

где  $L$  - вектор размерности  $n$ ;  $\sigma_1^2$  - дисперсия квадратичной формы  $L^T B_q(u) L$ .

5. План  $u_{\text{опт}}$  называют Q - оптимальным, если

$$\frac{1}{N} \sum_{t=t_i}^{t_N} A^T(t) B_q(u_{\text{опт}}) A(t) = \min_u \frac{1}{N} \sum_{t=t_i}^{t_N} A^T B_q(u) A(t),$$

$$\text{т.е. } J(u) = \frac{1}{N} \sum_{t=t_i}^{t_N} A^T(t) B_q(u) A(t),$$

где  $A(t)$  - вектор, компонентами которого являются известные функции.

Статистический смысл перечисленных планов может быть интерпретирован следующим образом:

D-оптимальный план минимизирует определитель ковариационной матрицы  $B_q$ , т.е. обобщенную дисперсию вектора оценок координатных и скоростных параметров движения КА или объем эллипсоида рассеяния оценок неизвестных параметров;

A-оптимальный план минимизирует след ковариационной матрицы  $B_q$ , т.е. среднюю дисперсию оцениваемых параметров. Геометрически это означает, что минимизируется сумма квадратов длин осей эллипсоида рассеяния;

E-оптимальный план минимизирует максимальное собственное значение ковариационной матрицы вектора оценок. Тем самым минимизируется наибольшая ось эллипсоида рассеяния оценок. Это означает, что дисперсии оценок отдельных параметров будут примерно одного порядка;

G-оптимальный план минимизирует максимальное значение дисперсии линейной формы  $L^T q^*$  вектора  $q^*$  с вектором  $L$ , который может быть задан исходя из требований к точности отдельных оценок, т.е. компонентами вектора  $L$  могут быть веса оцениваемых параметров;

Q-оптимальный план минимизирует среднюю по времени дисперсию линейной формы  $A^T(t)q^*$ .

Наиболее употребительными являются критерии A- и D-оптимальности плана эксперимента. Эти критерии обладают рядом преимуществ перед другими критериями. Они имеют наиболее удобную процедуру вычислений, универсальны, т.е. не зависят от выбора вектора оцениваемых параметров. Во многих случаях A и D-оптимальные планы совпадают с планами, полученными при использовании других критериев.

При практическом, оперативном этапе БНО управления важнейшим является вопрос обеспечения необходимой точности прогнозирования движения спутника на определенные интервалы времени. Получаемые ошибки возникают ввиду не полной адекватности математической модели реальному полету, а также из-за погрешностей уточнения начальных условий [3], [4]. В связи с этим, при выборе оптимальной схемы уточнения НУ будем также рассчитывать отклонения прогнозируемых параметров орбиты в конце определенного интервала прогнозирования (обычно совпадающим с продолжительностью технологического цикла БНО) от последующих уточненных НУ. Важное значение имеет также оперативность получения оценок параметров орбиты (время набора требуемого количества сеансов измерений) и время решения задачи на ПАК БНО.

При выборе критерия оптимальности необходимо учитывать тот факт, что наиболее значимым с точки зрения БНО является точность уточнения координатных и скоростных параметров. Поэтому, в данной работе будем использовать критерий A-оптимальности. Он позволяет получить точности (СКО) оценок координатных и скоростных параметров, а также их обобщенный показатель.

Для координатных составляющих ковариационной матрицы  $B_q$  след определяется как [1, 4]:

$$\text{SpR } B_q(u_{\text{опт}}) = \sqrt{B_q[1,1] + B_q[2,2] + B_q[3,3]} \Rightarrow \min,$$

а для скоростных:

$$\text{SpV } B_q(u_{\text{опт}}) = \sqrt{B_q[4,4] + B_q[5,5] + B_q[6,6]} \Rightarrow \min.$$

Так как диагональные элементы ковариационной матрицы имеют различные физические размерности, введем понятие приведенного полного следа.

$$\begin{aligned} \text{Sp } B_q(u_{\text{опт}}) &= \\ &= \sqrt{(B_q[1,1] + B_q[2,2] + B_q[3,3] + \\ &+ (B_q[4,4] + B_q[5,5] + B_q[6,6]) / 1e10^6)} \Rightarrow \min. \end{aligned}$$

Физически это означает, что СКО оценок координат учитывается в км, а скоростей в м/с, а размерность общего следа будет в дальнейшем указываться в приведенных единицах.

Анализ точности получения оценок параметров движения спутника EgyptSat-1 проведен на примере реальных измерений АСН, полученных на витках 5529, 5530, 5531, 5538, 5539, 5540, 5545, 5546, 5553, 5554, 5555. Эти включения проводились в целях БНО согласно штатной технологии, которая предусматривает запись измерений АСН на временных интервалах около 10 минут. Такие массивы измерений содержат около 50 точек. Всего было получено 25 массивов измерений. При этом уточненные НУ формировались на момент начала витка 5529 (2 апреля 2008 года).

При анализе оценки точности определения параметров движения КА по критериям для определения оптимального плана  $u_{\text{опт}}$  применялась вариация количества массивов данных АСН (от 1 до 25), используемых при решении задачи. Таким образом, последовательно было получено 25 уточненных начальных условий движения КА.

Результаты обработки измерений АСН представлены в табл. 1. Для удобства анализа представим данные табл. 1 в графическом виде. При этом на графиках не будем приводить данные уточнения по одному сеансу измерений, т.к. полученные оценки имеют очень низкую точность.

Из анализа графиков рис. 1 следует, что СКО оценок координат X и Y достигают значений менее 0.005 км уже при 6 массивах измерений и при увеличении объема выборки практически не уменьшаются. Для координаты Z такая точность достигается при включении в обработку не менее 16 сеансов измерений. Это объясняется тем, что в районе экватора (точка уточнения НУ) составляющая скорости  $V_z$  имеет максимальное значение.

Из анализа графиков рис. 2 следует, что СКО оценок скоростей  $V_x$  и  $V_y$  практически перестают уменьшаться при включении в обработку не менее 16 массивов данных. Для скорости  $V_z$  линейный участок зависимости достигается при использовании уже 8 массивов данных. При этом значения СКО не превышают 0.005 м/с.

Таблица 1

Точностные характеристики оценок параметров движения спутника

кол. сеансов	$\sigma X, км$	$\sigma Y, км$	$\sigma Z, км$	$\sigma V_x, м/с$	$\sigma V_y, м/с$	$\sigma V_z, м/с$	Sled R, км	Sled V, м/с	Sled R+V
1	0.0411	0.0889	0.5409	0.3504	0.3975	0.0348	0.5497	0.5311	0.7643
2	0.0107	0.0079	0.0258	0.0185	0.0200	0.0091	0.0290	0.0288	0.0408
3	0.0069	0.0051	0.0200	0.0151	0.0165	0.0046	0.0217	0.0228	0.0315
4	0.0059	0.0047	0.0162	0.0112	0.0121	0.0035	0.0179	0.0168	0.0246
5	0.0050	0.0039	0.0123	0.0081	0.0085	0.0033	0.0138	0.0122	0.0184
6	0.0040	0.0034	0.0074	0.0057	0.0059	0.0024	0.0090	0.0086	0.0125
7	0.0038	0.0033	0.0071	0.0055	0.0057	0.0023	0.0087	0.0082	0.0119
8	0.0035	0.0031	0.0070	0.0053	0.0055	0.0020	0.0084	0.0079	0.0115
9	0.0032	0.0028	0.0069	0.0051	0.0054	0.0019	0.0081	0.0077	0.0111
10	0.0033	0.0028	0.0068	0.0051	0.0053	0.0019	0.0081	0.0076	0.0111
11	0.0033	0.0028	0.0068	0.0050	0.0053	0.0019	0.0081	0.0076	0.0111
12	0.0032	0.0027	0.0067	0.0049	0.0052	0.0019	0.0079	0.0074	0.0108
13	0.0029	0.0025	0.0057	0.0045	0.0047	0.0018	0.0069	0.0067	0.0096
14	0.0028	0.0024	0.0055	0.0042	0.0044	0.0016	0.0066	0.0063	0.0091
15	0.0027	0.0024	0.0055	0.0041	0.0044	0.0015	0.0066	0.0062	0.0090
16	0.0025	0.0023	0.0051	0.0040	0.0042	0.0015	0.0061	0.0060	0.0085
17	0.0024	0.0022	0.0050	0.0038	0.0040	0.0014	0.0060	0.0057	0.0083
18	0.0024	0.0021	0.0049	0.0037	0.0040	0.0014	0.0059	0.0056	0.0081
19	0.0023	0.0020	0.0045	0.0036	0.0037	0.0013	0.0054	0.0054	0.0076
20	0.0022	0.0020	0.0045	0.0035	0.0037	0.0013	0.0054	0.0052	0.0075
21	0.0022	0.0019	0.0045	0.0034	0.0036	0.0012	0.0053	0.0051	0.0074
22	0.0021	0.0019	0.0043	0.0034	0.0035	0.0012	0.0051	0.0050	0.0071
23	0.0020	0.0018	0.0042	0.0033	0.0034	0.0012	0.0050	0.0049	0.0070
24	0.0020	0.0018	0.0041	0.0032	0.0034	0.0011	0.0050	0.0048	0.0069
25	0.0020	0.0018	0.0042	0.0032	0.0034	0.0011	0.0050	0.0048	0.0069

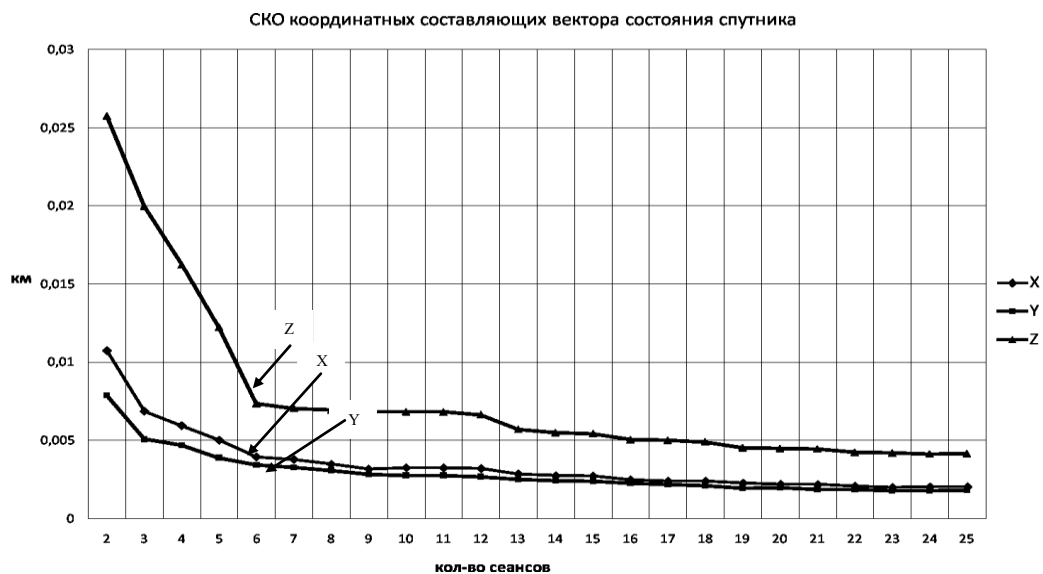


Рис. 1. СКО координатных составляющих уточнения параметров движения КА

Из анализа графиков в рис. 3 следует, что зависимости следа корреляционной матрицы  $SpR$ ,  $SpV$ ,  $Sp$  имеют одинаковый характер. При этом графики переходят в линейный участок на минимальных значениях при включении в обработку 16 сеансов измерений АСН. Такая схема соответствует работе АСН на двух смежных вечерних витках и последующих двух смежных утренних витках (по 4 равномерно разнесенных интервала на каждом витке). При этом время набора измерений составляет около 12 часов. Использование

большого количества массивов данных практически не приводит к повышению точности получаемых оценок, но значительно увеличивает время (до 24 часов), необходимое для получения выборки измерений.

### Вывод

Таким образом, с точки зрения критерия А-оптимальности и времени формирования выборки измерений, при работе по штатной схеме наиболее целесообразно использовать 16 массивов включения аппаратуры АСН.

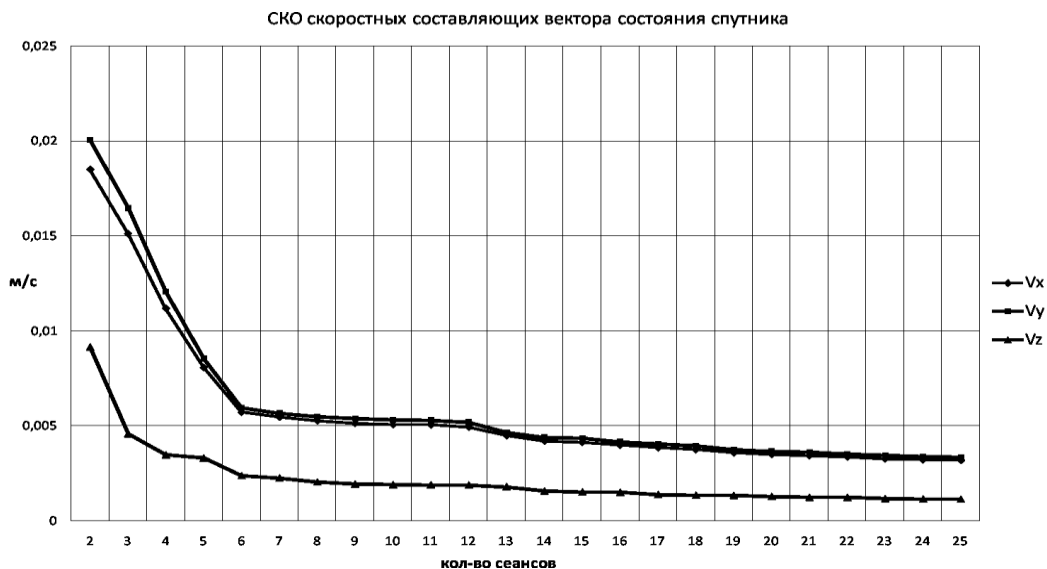
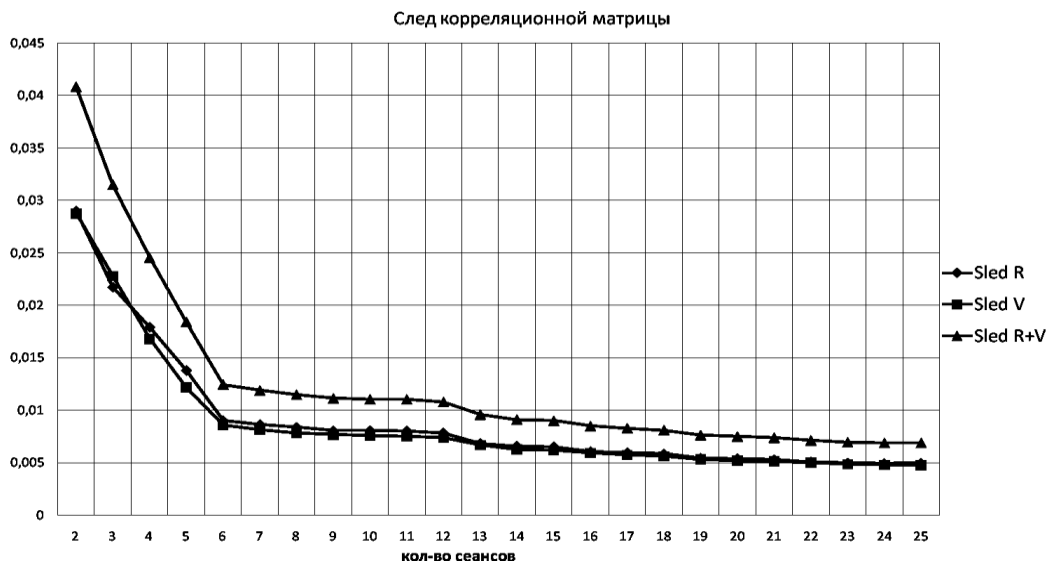


Рис. 2. СКО скоростных составляющих уточнения параметров движения КА

Рис. 3. Зависимости следа корреляционной матрицы  $SpR$ ,  $SpV$ ,  $Sp$ 

## Список литературы

1. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990.
2. Брандин В.Н., Васильев А.А., Худяков С.Т. Основы экспериментальной космической баллистики. – М.: Машиностроение, 1974. – 340 с.
3. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений / П.Е. Эльясберг – М.: Наука, 1976.

4. Ломако Г.И. Экспериментальная баллистика космических аппаратов / Г.И. Ломако. – Санкт-Петербург ВИККА им. А.Ф. Можайского, 1997. – 288 с.

Поступила в редколлегию 12.12.2012

Рецензент: д-р техн. наук проф. С.В. Козелков, Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка, Полтава.

## МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ НЕОБХІДНОЇ І ДОСТАТНЬОЇ КІЛЬКОСТІ ВИМІРЮВАНЬ АПАРАТУРИ СУПУТНИКОВОЇ НАВІГАЦІЇ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РУХУ КА EGYPTSAT-1

С.Д. Ставицький

У статті обґрунтований вибір А-оптимального критерію планування проведення навігаційних вимірювань апаратурою супутникової навігації, подано аналіз результатів обробки експериментальних даних.

**Ключові слова:** апаратура супутникової навігації, оптимальне планування експерименту.

## METHOD FOR DETERMINING A NECESSARY AND SUFFICIENT NUMBER OF MEASUREMENTS SATELLITE NAVIGATION TO DETERMINE THE PARAMETERS OF THE SPACECRAFT MOTION NAMED EGYPTSAT-1

S.D. Stavitskiy

*It substantiates the choice of A-optimal test planning for navigation measurements of satellite navigation equipment in the article, and presents an analysis of the results of the experimental data.*

**Keywords:** satellite navigation equipment, optimal design of experiments.