

УДК 621.391

В.И. Васишлин

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОМ ESPRIT ПРИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ МЕТОДОМ SSA

В статье рассматривается задача повышения эффективности спектрального анализа наблюдаемых на фоне шума сигналов методом ESPRIT при предварительной обработке данных методом SSA (его модификацией). Представлены результаты имитационного моделирования, подтверждающие повышение эффективности спектрального анализа сигналов методом ESPRIT при использовании метода SSA и его модификации.

**Ключевые слова:** уменьшение шума в наблюдении, собственные значения, собственные векторы, сингулярные значения, сингулярные векторы, малая выборка, метод SSA, размер сегмента.

### Введение

Потребность решения задач спектрального анализа (временного или пространственного) возникает в ряде приложений, таких как радиолокация, радиосвязь и других. Примером может служить оценивание частоты при обработке изображений в радиолокационных станциях (РЛС) с синтезированием апертуры, оценивание частоты Доплера отраженных от групповых целей сигналов, скорости ветра в метеорологических РЛС, распознавание мешающих отражений в РЛС управления воздушным движением, пеленгация источников шумовых помех и др. [1 – 4].

Решение задачи спектрального анализа (СА) возможно классическими методами, параметрическими методами (основанными на параметрических моделях случайных процессов), методом Кейпона, собственноструктурными (СС) методами и т.д. [2 – 4]. Возможность сверхразрешения (разрешения выше рэлеевского предела [1 – 6]) параметрическими методами объясняют экстраполяцией наблюдаемой последовательности за пределы интервала наблюдения, а у СС методов – использованием свойств собственных векторов (СВ) и собственных значений (СЗ) корреляционной матрицы (КМ) наблюдений. В условиях низких отношений сигнал-шум СС методы обеспечивают лучшие характеристики разрешения-измерения и оценивания частоты, чем авторегрессионные методы [4]. Ключевой операцией в таких методах является разделение информации, которая содержится в матрице данных (МД) или КМ, на два векторных подпространства – подпространство сигнала (ППС) и подпространство шума (ППШ).

Улучшение характеристик как СС методов, так и остальных методов СА, возможно при аппроксимации МД или КМ соответствующими матрицами пониженного ранга, записываемыми через главные СВ (СВ ППС). В основе такой аппроксимации лежит теорема Эккарта-Янга-Мирского [3, 4, 7, 8]. За

счет устранения основной доли вклада шума в МД или КМ увеличивается отношение сигнал-шум (ОСШ). Кроме того, дополнительные преимущества можно получить при использовании структурных свойств МД (КМ) [7 – 9].

Развитием этих подходов является метод SSA (singular spectrum analysis-анализа сингулярного спектра матрицы) [9]. К известным подходам по снижению шума наблюдения можно отнести метод обобщенных наименьших квадратов (total least squares – TLS) и структурированных наименьших квадратов (structured total least squares – STLS), вейлеты и др. [2 – 11].

В основе метода SSA лежат результаты работ по обработке сигналов и нелинейной динамике [7, 9]. Взаимосвязь СС методов (известных также как методы, основанные на использовании подпространств СВ (subspace-based)), метода SVD (singular value decomposition – разложения по сингулярным значениям (СИЗ) и сингулярным векторам СИБ)) и подходов по снижению шума наблюдения (включая SSA) отмечена в [7, 9].

В работе [11] показано, что предварительная обработка входной последовательности с помощью метода SSA позволяет повысить точность оценивания частот гармонических компонент сигнала собственноструктурными (СС) методами в условиях характерного для практики малого числа выборок.

Матрица данных (в методе SSA называемая траекторной) ганкелевого типа формируется в результате разбиения входной последовательности на перекрывающиеся сегменты. Разбиение на сегменты также характерно, например, для периодограммных методов спектрального анализа.

При обработке сигналов в антенных решетках (АР) для декорреляции сигналов (которая возможна при многолучевости распространения радиоволн и т.д.) выполняется разбиение АР на сегменты (подрешетки) [2 – 4, 12].

В [11] преимущества предварительной обработки входной последовательности методом SSA и предложенной модификацией этого метода показаны на примере СС метода Root-MUSIC для условий малой выборки [3]. При этом размер сегмента, используемый в методе SSA, выбирался равным размеру сегмента, который применялся при формировании МД для исходного метода Root-MUSIC. Выбор другого размера сегмента (окна) не рассматривался. Кроме того, представляет интерес применение метода SSA (его модификации) для повышения эффективности других методов СА. Среди СС методов вызывает интерес метод ESPRIT (оценивание параметров сигнала посредством вращательной инвариантности), который характеризуется меньшей вычислительной сложностью по сравнению с Root-MUSIC и сравнимой с ним точностью оценивания.

Поэтому цель данной работы – повысить эффективность спектрального анализа методом ESPRIT в условиях малой выборки за счет предварительной обработки данных методом SSA или его модификацией.

### Модель данных

Последовательность результатов наблюдения  $y(n)$ , состоящая из взятых через равные промежутки времени отсчетов  $V$  гармонических компонент  $x_v(n) = \alpha_v \sin(\omega_v n + \varphi_v)$  и белого гауссова шума  $e(n)$ , описывается как [3, 4, 13 – 15]:

$$y(n) = \sum_{v=1}^V x_v(n) + e(n) = s(n) + e(n), \quad (1)$$

где  $n = 1, \dots, N$ ,  $\alpha_v$  – амплитуда,  $\omega_v = 2\pi f_v$  – частота, а  $\varphi_v$  – фаза  $v$ -й гармонической компоненты. Полагаем, что  $\varphi_v$  – случайные независимые величины, равномерно распределенные на интервале  $[0, 2\pi)$ ,  $\omega_v \in [0, \pi)$ , а шум  $e(n)$  имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию  $\sigma^2$ . По наблюдению  $\{y(n)\}_{n=1}^N$  необходимо дать оценки значений частот  $\omega_v$ ,  $v = 1, \dots, V$ , используя методы спектрального анализа.

Выполнение временного СА усложняется в случае наличия одной выборки временного ряда. Исходный массив данных (полная выборка) разбивается на перекрывающиеся сегменты, и получают некоторое число выборок (подвыборок) меньшего размера. Сегментация наблюдаемой последовательности (ее разбиение на неперекрывающиеся (перекрывающиеся) сегменты) в спектральном анализе впервые была использована для уменьшения дисперсии оценки спектральной плотности мощности сигнала в периодограммах Бартлетта, Уэлча и Даниэла [4]. Сглаживание выборочного спектра в этих

методах основано на создании и усреднении псевдоансамбля периодограмм, которые вычисляются независимо для каждого из сегментов.

В пространственном СА разбиение АР на подрешетки помимо методов пространственного сглаживания используется в методе ESPRIT [2, 3].

Сегментация может приводить к уменьшению разрешающей способности СА, поэтому размер сегмента (подрешетки) выбирается из компромиссных соображений [3, 4]. Родственной задачей является задача выбора порядка модели в авторегрессионном методе. Последовательность входных данных из  $N$  отсчетов представим в виде  $K = N - m + 1$  векторов размером  $m > 2V$  [3] вида

$$y(n) = [y(n) \dots y(n+m-1)]^T, \quad n = 1, \dots, K. \quad (2)$$

Если такие вектора использовать как столбцы (строки) матрицы данных, то она будет иметь ганкелеву (теплицеву) структуру. Ганкелева матрица данных имеет вид [3, 9]:

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N-m+1) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(N-m+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y(m) & y(m+1) & \dots & y(N) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В нелинейной динамике разбиение скалярного временного ряда на векторные временные ряды (сегменты) называют вложением в фазовое пространство [14].

На основании МД (3) получают оценку КМ наблюдения  $\hat{R} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K y(n)y^T(n) = \frac{1}{K} YY^T$ . По результатам SVD МД либо разложения по СЗ и СВ КМ наблюдения реализуются СС методы СА.

### Метод ESPRIT с предварительной обработкой данных методом SSA

Для реализации метода SSA, в отечественной литературе известного как метод "Гусеница" (caterpillar), выполняются такие шаги [9]:

- 1) по выборке  $\{y(n)\}_{n=1}^N$  формируется ганкелева МД  $Y$ ;
- 2) выполняется поиск СИБ и СИЗ МД  $Y$  (или СЗ и СВ КМ  $\hat{R}$ );
- 3) группируются СИЗ и соответствующие им СИБ, что упрощенно сводится к отбору  $\hat{V}$  наибольших СИЗ и соответствующих им СИБ;
- 4) аппроксимируется (формируется отфильтрованная от шума наблюдения) МД

$$Y_{\text{аппр.}} = \sum_{q=1}^{\hat{V}} \hat{\mu}_q \hat{u}_q v_q^T;$$

- 5) формируется отфильтрованная выборка временного ряда  $y_{\text{фильтр.}}(n)$  путем усреднения элемен-

тов матрицы  $Y_{\text{анпр.}}$  (ганкелизации), находящихся на ее кроссдиагоналях.

Рекомендации по выбору размера окна (сегмента) приведены в [3, 4, 7, 10, 12].

Особенность работ [7, 9] состоит в том, что формируется теплицева матрица данных и выполняется усреднение элементов матрицы, расположенных на ее диагоналях.

В [11] предложена модификация метода SSA, особенность которой состоит в формировании отфильтрованной от шума наблюдения МД вида

$$Y_{\text{фильтр.}} = \sum_{q=1}^{\hat{V}} (\hat{\mu}_q - \hat{\sigma}) \hat{u}_q \hat{v}_q^T,$$

где  $\hat{\mu}_q$  – СИЗ,  $\hat{u}_q$  ( $\hat{v}_q$ ) – левый (правый) СИБ ППС МД  $Y$ ,  $\hat{\sigma}$  – среднеквадратическое отклонение шума [8].

Метод ESPRIT для рассматриваемой модели данных получен в [13]. При совместном использовании метода SSA с методом ESPRIT выполняются такие шаги: 1) по очищенной от шума последовательности  $Y_{\text{фильтр.}}(n)$  (восстановленному сигналу) формируется МД и осуществляется ее SVD с целью получить СИБ ППС (или по сформированной МД данных получить оценку КМ наблюдения и выполнить разложение КМ по СЗ и СВ); 2) по СИБ (СВ) ППС реализуется метод ESPRIT.

Моделирование осуществлялось для  $N = 64$ , число испытаний выбиралось равным  $L = 1000$ . Для исходного метода ESPRIT  $m = 56$ ,  $K = N - m + 1 = 9$ , а для метода SSA  $m = N/2$ . Для реализации метода ESPRIT (для решения его базового матричного уравнения) использовался метод наименьших квадратов. После метода SSA размер окна выбирался таким же, как и для исходного ESPRIT.

Рассматривался случай двух равномошных гармонических компонент наблюдаемого сигнала с двумя наборами частот: в первом  $f_1 = 0.2$  Гц и  $f_2 = 0.213$  Гц; во втором  $f_1 = 0.2$  Гц и  $f_2 = 0.208$  Гц. Таким образом, разнесение по частоте  $\Delta f = 0.013$  ( $\Delta f = 0.008$ ) меньше предела разрешения по Рэлю ( $1/N$ ) = 0.0156. В отличие от работы [8], в которой ОСШ задавалось изменением дисперсии шума, в данной работе ОСШ определялось как  $10 \log_{10} \left( \sum_{v=1}^V \alpha_v^2 / \sigma^2 \right)$ , где  $\sigma^2$  – дисперсия шума. Предполагалось, что число гармонических компонент сигнала равно  $\hat{V} = 4$  (оно может быть определено одним из известных методов [2–4, 15]).

На рис. 1 показаны зависимости среднеквадратической ошибки (СКО) оценивания частот от значений ОСШ (SNR), полученные методом ESPRIT для: исходной последовательности и ее предвари-

тельной обработки- фильтрации сигнальных компонент методом SSA (формировании КМ по  $Y_{\text{фильтр.}}(n)$ ) и фильтрации шума наблюдения модифицированным методом SSA (ESPRIT with modified SSA).

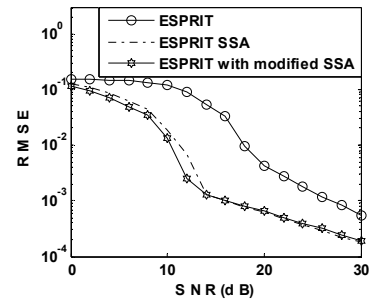


Рис. 1. Зависимости СКО оценивания частот гармонических компонент сигнала от ОСШ,  $\Delta f = 0.013$

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 1, показывает, что в рассматриваемом диапазоне ОСШ оба варианта предварительной обработки наблюдения позволяют повысить эффективность оценивания частот. Модификация метода SSA позволяет незначительно повысить точность оценивания при низких ОСШ (рис. 1).

Результаты моделирования также показывают, что выигрыш в применении модификации метода SSA увеличивается по мере уменьшения  $K$ . Кроме того, неточность оценивания числа компонент с помощью известных методов влияет на качество предварительной обработки сигналов методов SSA и его модификации, а эффективность метода ESPRIT при совместном использовании с методом SSA зависит от размера окна, используемого в методе SSA.

Для второй пары частот результаты расчета СКО приведены на рис. 2.

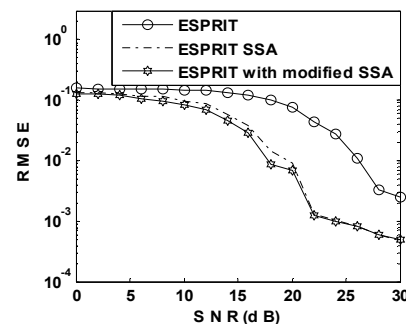


Рис. 2. Зависимости СКО оценивания частот гармонических компонент сигнала от ОСШ,  $\Delta f = 0.008$

Легко заметить, что и для рис. 2 свойства и качественный характер СКО сохраняются.

## Выводы

Использование метода SSA (его модификации) позволяет повысить эффективность спектрального

анализа СС методом ESPRIT в условиях малой выборки. На эффективность метода ESPRIT оказывает влияние выбор размера окна метода SSA.

Представляет интерес применить метод SSA и его модификацию для оценивания направлений прихода источников шумового излучения, оценки числа компонент сигнала, обработки изображений, при многошальных измерениях, формирования суррогатных данных, решения задачи предсказания в интересах спектрального анализа [6, 11 – 16]. Также целесообразно провести анализ качества восстановления сигнала с учетом эффекта перекачки подпространств [11], эффективности рассмотренного подхода в условиях цветных шумов, возможности совместного применения метода SSA с другими подходами по уменьшению шума наблюдения (вейвлетами и т.д.).

### Список литературы

1. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
2. Radar array processing / Ed. S. Haykin, J. Litva, T.J. Shepherd. – Springer Verlag Berlin, 1993.
3. Stoica P. Introduction to spectral analysis / P. Stoica, R.L. Moses. – Prentice hall, 1997.
4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. / С.Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
5. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике / Г.И. Василенко. – М.: Сов радио, 1979. – 272 с.
6. Аблеков В.К. Высокораешающие оптические системы / В.К. Аблеков, С.А. Колядин, А.В. Фролов. – М.: Машиностроение, 1985. – 176 с.
7. Тафтс Д.У. Оценивание частот суммы нескольких синусоид: Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом МП / Д.У. Тафтс, Р. Кумаресан // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №9. – С. 77-94.
8. Cadzow J.A. Signal enhancement – a composite property mapping algorithm / J.A. Cadzow // IEEE Transactions on ASSP. – 1988. – V. 36. – P. 49-62.

9. Golyandina N. Singular Spectrum Analysis for Time Series / N. Golyandina, A. Zhigljavsky. – Springer, London, 2013.

10. Dergunov A.V. Modern time-series analysis conceptions / A.V. Dergunov, Y.V. Kuts, L.M. Shcherbak // Third Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium: conf. 2011, Kyiv. – P. 378-381.

11. Василюшин В.И. Предварительная обработка сигналов с использованием метода SSA в задачах спектрального анализа / В.И. Василюшин // Прикладная радиоэлектроника: науч.-техн. журнал. – 2014. – Т. 13, № 1. – С. 43-50.

12. Василюшин В.И. Эффективность модифицированного метода пространственного сглаживания / В.И. Василюшин, М.В. Грушенко, А.Н. Колесников // Збірник наукових праць ХУПС. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 1(1). – С. 89-93.

13. Василюшин В.И. Повышение эффективности спектрального анализа методом ESPRIT с использованием технологии суррогатных данных / В.И. Василюшин // Прикладная радиоэлектроника. – 2013. – Т. 12, № 3. – С. 400-406.

14. Костенко П.Ю. Коррекция обработки сигналов при их спектральном анализе с использованием суррогатных автоковариационных функций наблюдения, полученных ATS-алгоритмом / П.Ю. Костенко, В.И. Василюшин // Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 57, № 6. – С. 3-12. – (Изв. Вузов).

15. Василюшин В.И. Оценивание числа гармонических компонент сигнала с использованием технологии суррогатных данных / В.И. Василюшин // Прикладная радиоэлектроника. – 2013. – Т. 12, № 4. – С. 542-552.

16. Василюшин В.И. Комбинированная пеленгация источников шумового излучения с использованием рандомизации собственных векторов корреляционной матрицы наблюдения и метода формирования луча / В.И. Василюшин // Системы обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2014. – Вип. 9 (125). – С. 13-17.

Поступила в редколлегию 11.11.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, доц. М.А. Павленко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

### СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ ESPRIT ПРИ ПОПЕРЕДНІЙ ОБРОБЦІ ДАНИХ МЕТОДОМ SSA

В.І. Василюшин

У статті розглядається задача підвищення ефективності спектрального аналізу спостережуваних на фоні шуму сигналів методом ESPRIT при попередній обробці даних з використанням методу SSA (його модифікації). Представлені результати імітаційного моделювання, що підтверджують підвищення ефективності спектрального аналізу методом ESPRIT при використанні методу SSA та його модифікації.

**Ключові слова:** зменшення шуму в спостереженні, власні значення, власні вектори, сингулярні значення, сингулярні вектори, мала вибірка, метод ESPRIT, метод SSA, розмір сегмента.

### SPECTRAL ANALYSIS BY ESPRIT METHOD WITH PRELIMINARY DATA PROCESSING BY SSA METHO

V.I. Vasylyshyn

The problem of efficiency enhancing of spectral analysis of the signals observed on the noise background via ESPRIT with data preprocessing by SSA method (by modification of the method) is considered in the paper. The simulations results are presented that confirm the enhancement of spectral analysis efficiency by ESPRIT method when using the SSA method and its modification.

**Keywords:** noise reduction in observation, eigenvalues, eigenvectors, singular values, singular vectors, small samples, ESPRIT, SSA method, segment size.