

УДК 629.7.015.7

О.В. Соловьев¹, С.М. Еременко², П.В. Прусак², В.В. Соколова²¹ ГП «Чугуевский авиационный ремонтный завод», Чугуев² Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИХРЕВОГО СЛЕДА В ДВУХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

Представлен подход к математическому моделированию вихревого следа за телами произвольной формы в нелинейной нестационарной постановке задачи для случая двумерного течения. Показана математическая корректность представленной методики расчёта.

Ключевые слова: вихревой след, математическая модель, метод дискретных вихрей, двумерная постановка задачи.

Введение

Наиболее распространённым режимом обтекания в природе и технике является отрывной. Возросший интерес к изучению отрывных течений обеспечен потребностями практических задач, развитием численных методов, увеличением производительности современных ЭВМ.

Особенностью отрывного обтекания тел является нестационарность течения в аэродинамическом следе. Рассматривается плоскопараллельное обтекание произвольного тела. Моделирование такого рода обтекания произвольных тел не вызывает затруднений и позволяет получать широкий круг практических результатов.

Отрывное обтекание произвольных тел условно делится на две группы:

1) отрыв потока наблюдается в фиксированных точках (изломы поверхности обтекаемого тела, угловые точки и т.п.);

2) отрыв потока с гладкой поверхности тела, когда геометрическое место точки отрыва потока изменяется с течением времени.

В соответствии с этим строится концепция создания методологии исследования вихревых следов за произвольными телами при их отрывном режиме обтекания.

Для изучения вихревых следов первой группы используются вихревые схемы течений, в которых обеспечивается условие о конечности скоростей и давлений во всём пространстве, в том числе и в точках излома поверхности изучаемого тела. Выполнение гипотезы Чаплыгина - Жуковского обеспечивается сходом в поток вихревой пелены в этих точках (рис. 1).

Для исследования обтекания тел второй группы и вихревых следов за ними используются вихревые схемы, представленные на рис. 2.

В первом случае свободные вихри сходят в поток с угловых точек тела, циркуляции скорости ко-

торых с течением не изменяются в рамках ближнего вихревого следа, а в дальнем вихревом следе – изменяются в соответствии с законами, о которых будет изложено ниже.

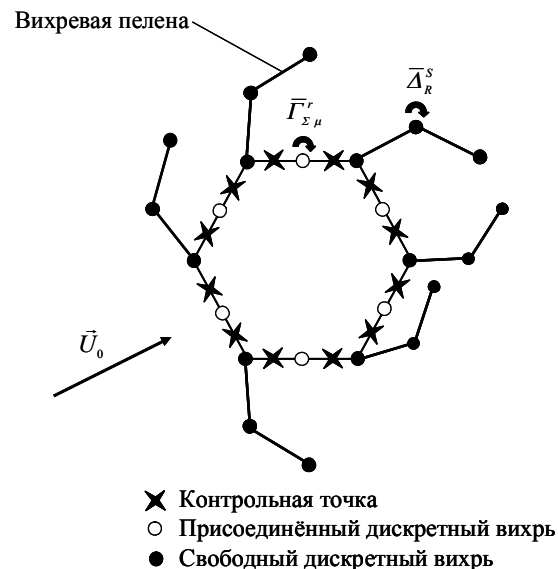


Рис. 1. Вихревая схема тела 1-й группы

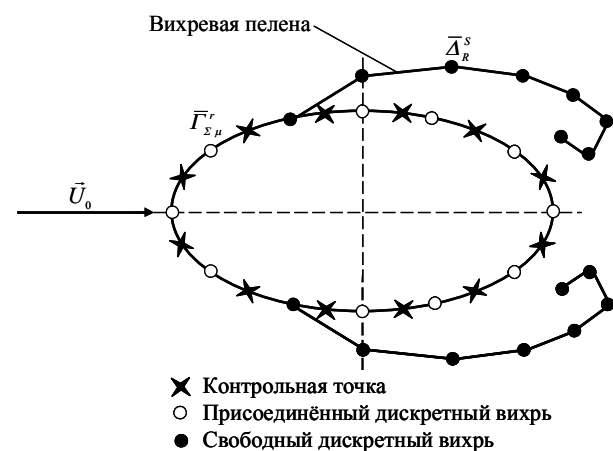


Рис. 2. Вихревая схема тела 2-й группы

Во втором случае – на каждом расчётном временном шаге необходимо определять распределён-

ные аэродинамические нагрузки (распределение коэффициента давления по поверхности гладкого тела) и их минимальные значения. Геометрическим местом точек отрыва являются ближайшие суммарные вихри к контрольным точкам, в которых сосредоточены минимальные коэффициенты давления [1]. Вихревая пелена сходит в поток с поверхности тела по касательной к ней, имея циркуляцию суммарного вихря.

Постановка и решение задачи

Математические модели обтекания произвольных тел, рассмотрены в работах [2, 3] – для тел 1-й группы, для тел 2-й группы – в работах [4, 5, 6].

Как принято, вихревой след условно делится на две области: ближний вихревой след (спутный след), длина которого примерно составляет до 10 линейных размеров исследуемого тела и дальний след (вихревой след). Иногда для описания структуры вихревого следа выделяют переходную зону, расположенную между спутным и вихревым следом. Характеристики спутного следа определяются в рамках идеальной жидкости [2, 3, 7].

Для математического моделирования вихревого следа используется уравнение Гельмгольца, описывающее движение свободных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости [8]:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \vec{\nabla}) \vec{W}, \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1)$$

где $\vec{\Omega}$, \vec{W} – соответственно векторы угловой и линейной скоростей движения жидкости. В вихревом следе сказываются эффекты вязкости среды, диффузии вихрей и др. Для вязкой несжимаемой жидкости (1) имеет вид:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \vec{\nabla}) \vec{W} + \nu \Delta \vec{\Omega}, \quad (2)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости среды, Δ – оператор Лапласа.

Для плоскопараллельного течения (2) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + W_y \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + W_z \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = \\ = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (3) описывает процесс диффузии вихря бесконечной длины в вязкой несжимаемой жидкости.

Предполагая, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ вихрь с циркуляцией скорости Γ_{+i} находится в точке с координатами y_i, z_i параллельно оси Ox , тогда в соответствии с точным решением уравнения (3) для произвольно расположенной точки в

пространстве с координатами (y, z) на плоскости yOz [8]:

$$\Omega_{x(t)}(y, z, t) = \frac{\Gamma_{+i}}{8\pi\nu t} e^{-\frac{(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}{4\nu t}}. \quad (4)$$

В соответствии с теоремой Стокса и с учётом начальных условий:

$$\Gamma_{+i}(y, z, 0) = \Gamma_{+i} = \text{const}, \quad (5)$$

выражение для циркуляции в произвольной точке пространства с координатами (y, z) и в произвольный момент времени t примет вид:

$$\Gamma_{+i}(y, z, t) = \Gamma_{+i} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} \right), \quad (6)$$

где $R^2 = (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$.

Проекции вектора скорости, индуцируемой вихрём в точке с координатами (y, z) в момент времени t , определяются:

$$\begin{aligned} W_{yi}(y, z, t) &= \frac{\Gamma_{+i}}{2\pi} \frac{z - z_i}{R^2} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} \right), \\ W_{zi}(y, z, t) &= \frac{\Gamma_{+i}}{2\pi} \frac{y - y_i}{R^2} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Поле возмущённых скоростей, описываемое выражениями (7), удовлетворяет уравнению движения вихрей (3) и уравнению неразрывности плоско-го течения несжимаемой жидкости, которое для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Для системы вихрей суммарная завихренность $\Omega_{x\Sigma}$ и составляющие суммарной скорости $(W_{y\Sigma}, W_{z\Sigma})$ в момент времени t для точки с координатами (y, z) определяются:

$$\begin{aligned} \Omega_{x\Sigma}(y, z, t) &= \sum_{i=1}^k \Omega_{xi}(y, z, t); \\ W_{y\Sigma}(y, z, t) &= \sum_{i=1}^k W_{yi}(y, z, t); \\ W_{z\Sigma}(y, z, t) &= \sum_{i=1}^k W_{zi}(y, z, t), \end{aligned} \quad (9)$$

где k – общее количество вихрей в ансамбле.

Суммарное поле возмущённых скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности (8) и уравнению движения (3).

Оценка математической корректности метода

Корректность представленного метода рассматривается на примере обтекания профиля. Пусть профиль движется в несжимаемой вязкой среде со скоростью U_0 с углом атаки α , движение рассматривается в связанной системе координат Oxy . Считается, что циркуляция свободных вихрей с течением времени не изменяется.

Предполагается, что профиль обтекается невозмущённым потоком под малыми углами атаки, что определяет линейную постановку задачи. Из этого можно предполагать, что свободные вихри движутся в плоскости Oxy со скоростью U_0 .

Пусть профиль занимает на оси Ox отрезок $[-1,1]$. В силу того, что с задней кромки профиля сходит вихревая пелена, скорости на ней конечны и, следовательно, ближайшей к задней кромке должна быть контрольная точка, а к передней кромке – присоединённый вихрь (рис. 3).

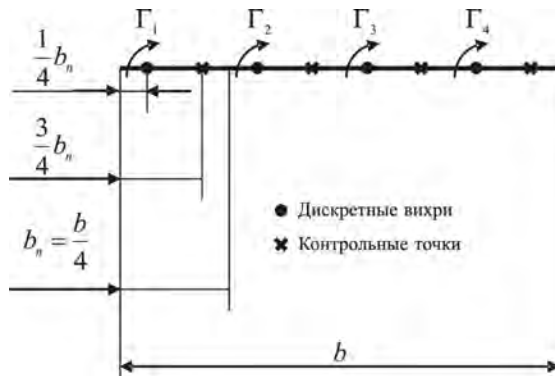


Рис. 3. Пример вихревой схемы профиля

При замене поверхности профиля конечным количеством вихрей необходимо задавать их размещение на крыле так, чтобы гидродинамически замкнуть систему уравнений, определяющих напряжённость присоединённых вихрей, выбрать по количеству присоединённых вихрей такое же количество контрольных точек, в которых будет выполняться условие непротекания.

Например, если профиль моделируется n -дискретными вихрями (рис. 3, $n=4$), то обычно геометрическое место вихрей определяется по правилу:

- хорда профиля делится на n равных отрезков ($b_n = b/n$);
- на $1/4$ длины каждого отрезка хорды профиля ($b/4$), отсчитывая от его начала, располагается присоединённый несущий вихрь;
- на $3/4 b_n$ располагается линия, где выполняется граничное условие непротекания.

Такое дискретное представление поверхности исследуемого профиля присоединёнными вихрями и точками (контрольные точки), где выполняются гра-

ничные условия. Из принятых в МДВ правил разбиения профиля следует, что между одним дискретным вихрём, моделирующим обтекаемую поверхность, и контрольной точкой, где выполняются граничные условия, должно быть расстояние, равное половине хорды, т.е. если присоединённый вихрь расположен на $1/4$ хорды от носка профиля, то граничные условия должны выполняться на расстоянии $3/4$ хорды. Поэтому целесообразно при моделировании профиля несколькими присоединёнными вихрями необходимо их расположить так, чтобы между вихрём и контрольной точкой на каждом расчётном участке было расстояние, равное половине длины этого участка $1/2 b_n$. Координаты присоединённых вихрей и контрольных точек определяются выражениями:

$$x_i = -1 + (i - 3/4)h, \quad h = 2/n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$x_{0j} = x_i + h/2 = -1 + (i - 1/4)h, \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где n – количество присоединённых вихрей и контрольных точек.

Изменения всего вихревого слоя наблюдается через промежутки времени $\Delta t = h/U_0$. Для простоты предполагается, что $U_0 = 1$. Координаты свободных вихрей, моделирующих спутный след за профилем, в момент времени t_r определяются:

$$\xi_r = x_n + (r - S + 1)t. \quad (12)$$

Пусть циркуляция присоединённого вихря в точке x_i в расчётный момент времени r равна Γ_{ir} , а циркуляции свободных вихрей, сошедших с профиля, равны Λ_s^r , $s = 1, \dots, r$, постоянны с течением времени. Выполнение граничного условия о непротекании профиля в контрольных точках x_{0j} , $j = 1, \dots, n$ даёт систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} W_{ij} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r W_{sjr} = -V_j^*, \quad (13)$$

$$j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где V_j^* – нормальная составляющая скорости невозмущённого потока в контрольной точке x_{0j} ; W_{ij} – нормальная составляющая возмущённой скорости в контрольной точке x_{0j} , индуцируемая вихрём единичной интенсивности, расположенном в точке с координатой x_j ; W_{sjr} – нормальная составляющая скорости в точке x_{0j} вязкой среды, из [8] следует, что:

$$W_{sjr} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{(t_r - t_s)^2}{4vt}\right)}{x_{0j} - x_n - (t_r - t_s + \Delta t)}. \quad (14)$$

СЛАУ (13) дополняется уравнением дискретного аналога постоянства циркуляции в пространстве. Предполагается, что профиль начинает своё

движение из состояния покоя мгновенно, тогда (14) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r = 0, \quad r = 1, \dots, . \quad (15)$$

Из этого имеет место СЛАУ:

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} W_{ij} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r W_{sjr} = -V_j^*; \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots,$$

Полагая, что $\Gamma_{ir} = \gamma(x_i, t_r)h$, $\Lambda_s^r = \delta(t_s)\Delta t$,

СЛАУ (16) представляется в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\gamma(x_i, t_r)h}{x_{0j} - x_i} + \\ & + \sum_{s=1}^r \frac{\delta(t_s) \left(1 - \exp\left(-\frac{(t_r - t_s)^2}{4vt_r}\right) \right)}{x_{0j} - x_n - (t_r - t_s + \Delta t)} \Delta t = 2\pi f(t_r); \quad (17) \\ & \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, t_r)h + \sum_{s=1}^r \delta(t_s)\Delta t = 0, \\ & j = 1, n; \quad r = 1, \dots, f(t_s) = -V_j^*. \end{aligned} \right.$$

Матрица СЛАУ (17) – невырождена, следовательно, она разрешима [7]. С другой стороны, по результатам из [7], предполагая, что функции $\gamma(x, t)$, $\delta(t)$ принадлежат классу H^* на соответствующих множествах, из этого видно, что СЛАУ (17) аппроксимирует систему интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{\gamma(x, t) dx}{x_0 - x} + \int_0^t \frac{\delta(\tau) \left(1 - \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4v\tau}\right) \right)}{x_0 - 1 - (t-\tau)} d\tau = \\ & = 2\pi f(t); \quad (18) \\ & \int_{-1}^1 \gamma(x, t) dx + \int_0^t \delta(\tau) d\tau = 0, \end{aligned} \right.$$

$$x_0 \in [-1, 1], \quad t \geq 0,$$

где H^* представляет собой класс функций таких, что $\phi(t) \in H^*$, $t \in [a, b]$.

Тогда:

$$\phi(t) = \frac{\Psi(t)}{(t-a)^\alpha (b-t)^\mu}, \quad \Psi(t) \in H^*(\alpha), \quad [a, b], \quad \alpha \geq 0, \quad \mu \leq 1. \quad (19)$$

Можно показать, что (18) имеет единственное решение, удовлетворяющее принятым граничным условиям. Из физических соображений первое уравнение (18) рассматривается относительно неограниченной в точке $x = -1$ функции $\gamma(x, t)$ как сингулярное интегральное уравнение на отрезке $[-1, 1]$ индекса $k=0$. Решение этого уравнения относительно $\gamma(x, t)$ даёт:

$$\gamma(x, t) = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(t) + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x_0}} \int_0^t \delta(\tau) \left(1 - \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4v\tau}\right) \right) d\tau \times \quad (20)$$

$$\times \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x_0}}{\sqrt{1-x_0}} \frac{dx_0}{(x-x_0)[x_0-1-(t-\tau)]}.$$

Известно [6], что

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{x_0-x} \equiv -\pi; \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x_0-x} \equiv \pi, \quad |x_0| \leq 1; \quad (21)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-b)\sqrt{1-x^2}} = \pm \frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}},$$

знак “+” соответствует $b < 1$, “-” соответствует $b > 1$.

Из третьего интеграла (21) можно получить:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{b-x_0} = -\pi + \pi \sqrt{\frac{b+1}{b-1}}, \quad b \geq 1; \quad (22)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{b-x} = \pi - \pi \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}, \quad b \geq 1.$$

Используя (21) и (22):

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{(x-x_0)[x_0-1-(x-\tau)]} = \frac{\sqrt{2+t-\tau}}{t-\tau} \frac{\pi}{1+(t-\tau)-x}. \quad (23)$$

Соотношение (20) принимает вид:

$$\gamma(x, t) = f_1(x, t) + \frac{1}{\pi} \sqrt{(1-x)/(1+x)} \times \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4v\tau}\right) \right]}{1+(t-\tau)-x} \delta(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Подстановка (24) во второе уравнение (17) даёт:

$$\int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \left(1 - \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \right) \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4v\tau}\right) \delta(\tau) d\tau = 2\pi f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (25)$$

Предполагая, что $f(t) \in c_1[0, T]$, $f(0) = 0$, тогда всякое непрерывное решение уравнения (25) при $0 < t \leq T$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\delta(\tau) + \int_0^t K(t, \tau) \delta(\tau) d\tau = 2\pi f'(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (26)$$

$$K(t, \tau) = \left[\exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4v\tau}\right) - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{2+t-\tau}(t-\tau)^{3/2}} + \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4v\tau}\right) \frac{\sqrt{t-\tau}(t+\tau)}{2vt^2(\sqrt{2+t-\tau} + \sqrt{t-\tau})}, \quad (27)$$

полученное из (25) полученным дифференцированием по t .

Видно, что и обратно, всякое непрерывное решение уравнения (26) при $0 < t \leq T$ удовлетворяет уравнению (25).

Умножением обеих частей уравнения (26) на \sqrt{t} и введением в рассмотрение новой неизвестной функции $y(t) = \delta(t)\sqrt{t}$ можно получить:

$$y(t) + 2 \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{t} K(x^2) y(x^2) dx = 2\pi f'(t)t. \quad (28)$$

В силу того, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |2\sqrt{t} K(t, x^2)| &\leq M, \quad 0 \leq x^2 \leq t \leq T, \\ |2\pi f(t)\sqrt{t}| &\leq N, \end{aligned} \quad (29)$$

решение (28) существует и единственно, его можно представить в виде суммы ряда:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(t) - y_1(t) + y_2(t) - \dots, \\ y_0(t) &= 2\pi f'(t)\sqrt{t}, \\ y_{k+1}(t) &= \int_0^{\sqrt{t}} 2\sqrt{t} K(t, \tau^2) y_k(\tau^2) d\tau, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

В силу того, что (28) является следствием уравнения (25), решение исходного уравнения существует и, кроме того, имеет вид:

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i y_i(t). \quad (31)$$

Отсюда видно существование и единственность решения системы уравнений (24) и (25), т.е. справедлива теорема:

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(t) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \\ &\times \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \left[\frac{1 - \exp(-(t-\tau)^2/(4vt))}{1+t-\tau-x} \right] \delta(\tau) d\tau, \\ &\int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \left(1 - \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \right) e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4vt}} \delta(\tau) d\tau = \\ &= 2\pi f(t), \\ t &\in [0, T], \quad f(0) = 0, \quad f(t) \in c_1[0, T]. \end{aligned} \quad (32)$$

Из теоремы следует, что представленная модель обтекания профиля математически корректна.

Выводы

1. Предложенные авторами методики, базирующиеся на методе дискретных вихрей, позволяют определять характеристики вихревых следов для тел произвольной формы, в том числе, при их отрывном обтекании.

2. Математическая корректность представленной методики расчёта, позволяет предполагать получение достоверных результатов численных экспериментов.

Список литературы

1. Математическое моделирование отрывного обтекания тел [Текст] / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Нишит, Р.М. Фёдоров. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
2. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа [Текст] / С.М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1965. – 242 с.
3. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью [Текст] / С.М. Белоцерковский, М.И. Нишит. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел [Текст] / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Нишит, Р.М. Фёдоров. – М.: Наука, 1988. – 231 с.
5. Белоцерковский С.М. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей [Текст] / С.М. Белоцерковский, А.С. Гиневский. – М.: Физматлит, 1995. – 367 с.
6. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике [Текст] / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. – М.: Наука, 1985. – 252 с.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Техническое пособие [Текст] / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1984.
8. Solovyov O. Mathematical modeling of two-dimensional turbulent streams [Text] / O. Solovyov, N. Nechyporuk // Czech aerospace proceeding, Letecký zpravodaj, 1/2014. – P. 16-19.

Поступила в редколлегию 2.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Н. Кобрин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИХРОВОГО СЛІДУ У ДВУХМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ ЗАВДАННЯ

О.В. Соловйов, С.М. Єрмоєнко, П.В. Прусак, В.В. Соколова

Представлено підхід до математичного моделювання вихрового сліду за тілами задовільної форми в нелінійній нестационарній постановці завдання для випадку двомірної течії. Показана математична коректність представленої методики розрахунку.

Ключові слова: вихровий слід, математична модель, метод дискретних вихорів, двомірна постановка завдання.

MATHEMATICAL MODEL OF THE VORTEX WAKE IN TWO-DIMENSIONAL AIR MISSION FORMULATION

O.V. Solovyov, S.M. Eryomenko, P.V. Prusak, V.V. Sokolova

The approach to vortex wake mathematical modeling behind the arbitrary shape bodies in a non-linear non-stationary air mission formulation for the case of two-dimensional flow is given. Mathematical correctness of presented calculation method is shown.

Keywords: vortex wake, mathematical model, discrete vortex method, two-dimensional air mission formulation.