УДК 519.2

Н.В. Фищукова, Т.И. Каткова, Я.В. Святкин

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЦЕННОСТИ НЕЧЕТКИХ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрена задача выбора рационального набора контролируемых параметров при разработке диагностических экспертных систем. Для ее решения введен критерий оценки информационной ценности контролируемого параметра в задаче дифференциальной диагностики. Предложена методика расчета численного значения критерия. Полученные оценки могут быть использованы для коррекции набора контролируемых параметров. Приведен пример расчета для частного случая гауссовых условных плотностей распределения случайных значений параметра.

***Ключевые слова**: экспертные системы, контролируемый параметр, информационная ценность.*

Введение

При разработке диагностических экспертных систем возникает проблема выбора рационального набора контролируемых параметров, используемых для определения состояния диагностируемого объекта. Такой выбор должен обладать рядом свойств: во-первых, количество контролируемых параметров должно быть минимально; во-вторых, они должны содержать необходимую информацию о состоянии объекта контроля и быть слабозависимыми между собой; в-третьих, выбранный набор параметров должен быть достаточен для адекватной оценки состояния диагностируемого объекта. Перечисленные требования очевидным образом противоречивы, поэтому проблема выбора не тривиальна. Понятно, что решение задачи выбора существенно опирается на возможность расчета информационной ценности контролируемых параметров. Введем методику расчета информационной ценности $I_q^{(k,l)}$ произвольного случайного параметра X_q в задаче дифференциальной диагностики пары состояний H_k и H1 объекта с использованием условных плотностей распределения этого параметра для выбранных состояний. Информационная ценность должна определять, в какой мере выражены специфические особенности условных распределений конкретного параметра для пары разных диагнозов.

Понятно, что если условные распределения значений того или иного параметра для разных диагнозов совпадают или неразличимо близки, то этот параметр мало информативен. С другой стороны, если эти распределения для разных диагнозов существенной различаются, то такой параметр обладает хорошей информативностью.

Подобные рассуждения могут быть использованы и в случае, если контролируемый параметр – нечеткое число с различными функциями принадлежности для разных состояний объекта контроля.

Цель работы - построение критерия оценки и методики расчета информационной ценности контролируемого параметра в задаче дифференциальной диагностики.

Постановка задачи

Задачу оценки информационной ценности контролируемого случайного параметра формулируют и решают в терминах теории проверки статистических гипотез [1, 2]. Рассмотрим классическую задачу проверки простой гипотезы H0 против простой альтернативы H1. Традиционный подход таков. Как известно [1, 2], при решении задачи проверки гипотез необходимо построить статистический критерий, позволяющий на основании наблюдения контролируемого параметра принять решение о принятии или отклонении основной гипотезы H0. Этот критерий обычно строится с помощью критической области, при попадании в которую наблюдаемого параметра (или некоторой функции от него) гипотеза H0 отвергается. Пусть наблюдаемый параметр X является случайной величиной с плотностью распределения $f_0(X / H_0)$ при условии, что верна гипотеза H0, и с плотностью $f_1(X / H_1)$, если верна альтернативная гипотеза H1.

Введем критическую область ω при попадании в которую наблюдаемого параметра X гипотеза H0 отвергается (то есть принимается гипотеза H1). При этом $\Omega \setminus \omega$ – область значений наблюдаемого параметра, дополняющая критическую область ω до области Ω всех возможных значений параметра X. Вероятность отвергнуть гипотезу H0, когда она верна, называется уровнем значимости критерия (вероятность ошибки первого рода) и определяется по формуле

$$\alpha = \int\limits_{\omega} f_0(X / H_0)dx .$$

Напротив, вероятность принять гипотезу H_0, когда верна гипотеза H_1, называется вероятностью ошибки второго рода и вычисляется по формуле

$$\beta = \int\limits_{\Omega\backslash\omega} f_1(X / H_1)dx = 1 - \int\limits_{\omega} f_1(X / H_1)dx .$$

Таким образом, величины вероятности ошибок первого и второго рода зависят от того, каким образом выбрана критическая область.

При решении многих задач эта область выбирается так, чтобы максимизировать вероятность отвергнуть гипотезу H0, когда верна гипотеза H1, при условии, что вероятность ошибки первого рода равна заданной. Этот критерий принятия решений называется критерием Неймана-Пирсона. На практике гораздо чаще используется другой критерий, в котором ошибки первого и второго рода входят симметрично:

$$R(\omega) = \upsilon_0 P(H_0)\int\limits_{\omega} f_0(X / H_0)dx + +\upsilon_1 P(H_1)\left[1 - \int\limits_{\omega} f_1(X / H_1)dx\right]. \quad (1)$$

Здесь υ_1, υ_2 – оценки риска ошибок первого и второго рода соответственно, а $P(H_0)$, $P(H_1)$ – априорные вероятности того, что гипотезы H_0 и H_1 верны. Теперь для заданного наблюдаемого параметра X критическая область ω выбирается так, чтобы минимизировать (1). Если априорные вероятности $P(H_0)$ и $P(H_1)$ не известны и опасность ошибок перепутывания гипотез приблизительно одинакова, то критерий (1) упрощается к виду:

$$R(\omega) = \int\limits_{\omega} f_0(X / H_0)dx + \int\limits_{\Omega\backslash\omega} f_1(X / H_1)dx . \quad (2)$$

Тогда информационная ценность параметра X оценивается соотношением:

$$I(\omega) = 1 - \widehat{R}(\omega^*) , \quad ,(3)$$

где ω^* - критическая область, минимизирующая сумму $\alpha + \beta$ вероятностей ошибок первого и второго рода.

Для непрерывного параметра X критическая область определяется точкой пересечения кривых, соответствующих плотностям распределения значений этого параметра для конкурирующих гипотез, то есть задается решением уравнения

$$f(X / H_0) = f(X / H_1) . \quad (4)$$

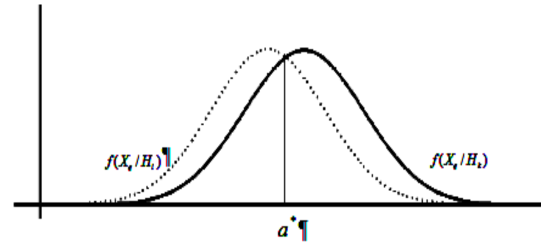
Пусть a^* - решение уравнения (4).

Тогда $\omega = \{x : x \geq a^*\}, \Omega / \varpi = \{x : x < a^*\}$.

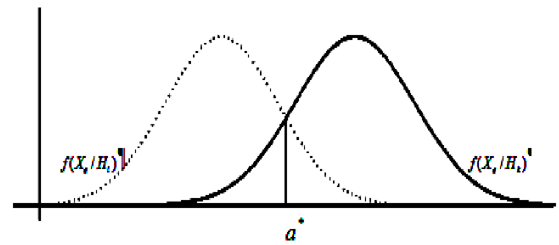
Возвратимся к задаче оценки информационной ценности некоторого контролируемого параметра X_q при дифференциальной диагностике пары состояний H_k и H_l. При этом соотношение (3) имеет вид:

$$I_q^{(k,l)} = 1 - \left(\int\limits_{-\infty}^{a^*} f_k(X_q / H_k)dX_q + \int\limits_{a^*}^{\infty} f_l(X_q / H_l)dX_q \right).$$

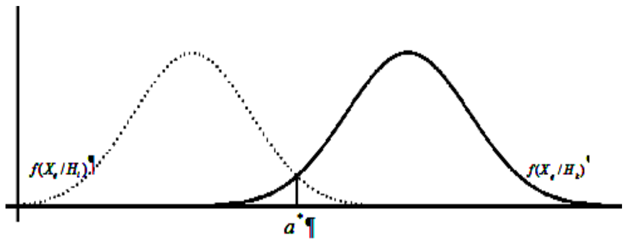
На рис. 1, а – в последовательно отражены ситуации, когда контролируемый параметр соответственно «мало», «удовлетворительно» и «хорошо» информативен. При этом первое слагаемое в круглых скобках определяет вероятность ошибочного принятия диагноза H1, когда верен диагноз H_k, а второе слагаемое – вероятность противоположной ошибки.



а – параметр «мало» информативен



б – параметр «удовлетворительно» информативен



в – параметр «хорошо» информативен

Рис. 1. Примеры распределения контролируемых параметров для пары состояний объекта

Эта формула неудобна для практических расчетов, так как для каждой пары состояний необходимо искать точку пересечения распределений $f(X_q / H_k)$ и $f(X_q / H_l)$, что далеко не всегда легко выполнить аналитически. Рассмотрим другой подход к расчету информационной ценности параметра.

Основные результаты

Введем приближенную оценку информационной ценности по формуле:

$$\widehat{I}_q^{(k,l)} = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[f(X_q / H_k) \cdot f(X_q / H_l) \right]^{\frac{1}{2}} dX_q . \quad (5)$$

Эта величина мало отличается от искомой, но ее вычисление существенно проще. Заметим, что точность получаемой при этом оценки тем выше, чем больше информационная ценность параметра.

Принципиальное достоинство метода оценки информационной ценности параметра состоит в отсутствии необходимости отыскивать критическую область.

Численное значение $\hat{I}_q^{(k,l)}$ характеризует меру различимости функций $f(X_q / H_k)$ и $f(X_q / H_l)$ и обладает следующими свойствами.

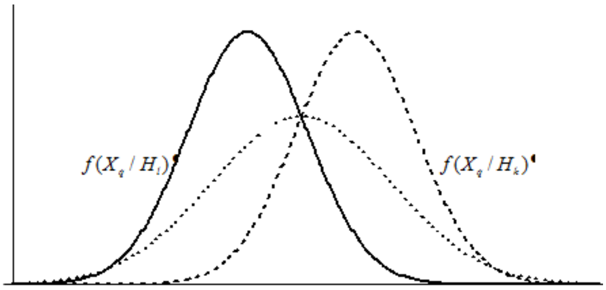
1) $\hat{I}_q^{(k,l)} = 1$, если функции $f(X_q / H_k)$ и $f(X_q / H_l)$ не пересекаются;

2) $\hat{I}_q^{(k,l)} = 0$, если функции $f(X_q / H_k)$ и $f(X_q / H_l)$ совпадают;

3) $0 \le \hat{I}_q^{(k,l)} \le 1$, в остальных случаях, причем величина $\hat{I}_q^{(k,l)}$ монотонно возрастает по мере уменьшения площади участка, лежащего одновременно под кривыми $f(X_q / H_k)$ и $f(X_q / H_l)$;

4) если для какой-либо пары параметров X_{q_1} и X_{q_2} имеет место неравенство $I_{q_1}^{(k,l)} > I_{q_2}^{(k,l)}$, то это же неравенство имеет место и для их оценок, то есть $\hat{I}_{q_1}^{(k,l)} > \hat{I}_{q_2}^{(k,l)}$.

Рис. 2 иллюстрирует смысл введенной оценки информационной ценности контролируемого параметра в задаче дифференциальной диагностики.



Среднее геометрическое плотностей распределения значений параметра X_q для состояний H_1 и H_k

Рис. 2. Расчет приближенной оценки информационной ценности

По результатам расчета $\hat{I}_q^{(k,l)}$ для любой пары H_k и H_l конкурирующих состояний формируются матрицы информационной ценности для всех контролируемых параметров X_q, $q = 1,2,...,n$.

Полученные оценки информационной ценности параметров могут быть использованы для коррекции набора контролируемых параметров, составляющих базу данных экспертной системы.

Отметим, что реализованная соотношением (2) идея расчета оценки информационной ценности контролируемых параметров может быть использована и в том случае, когда в силу объективных причин (например недостаточность статистических данных) условные плотности распределения параметра X_q для двух конкурирующих диагнозов H_k и H_l не могут быть получены. Вместе с тем, часто имеющихся данных может быть достаточно для построения менее требовательных описаний распределений наблюдаемых значений контролируемого параметра, например, средствами нечеткой математики. Аналогом условных плотностей распределения являются соответствующие функции принадлежности [3,4].

При этом, однако, следует иметь ввиду, что функции принадлежности нечетких чисел, в отличие от плотностей распределения случайных величин, не нормированы. Пусть $\mu(X_q / H_k)$ и $\mu(X_q / H_l)$ - условные функции принадлежности параметра X_q для диагнозов H_k и H_l. Тогда аналог соотношения (4) будет иметь вид:

$$\hat{J}_q^{(k,l)} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mu(X_q / H_k) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(X_q / H_k) dX_q \times \times \mu(X_q / H_l) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(X_q / H_l) dX_q \right]^{1/2} dX_q = \tag{6}$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{\mu}(X_q / H_k) \cdot \mu(X_q / H_l) \right]^{1/2} dX_q .$$

Пусть, например, условные функции принадлежности гауссовы и

$$\mu(X_q / H_k) = \exp\left\{ -\frac{(X_q - \overline{X}_{qk})^2}{2\sigma_q^2} \right\};$$

$$\mu(X_q / H_l) = \exp\left\{ -\frac{(X_q - \overline{X}_{ql})^2}{2\sigma_q^2} \right\}.$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(X_q / H_k) dX_q = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(X_q - \overline{X}_{qk})^2}{2\sigma_q^2} \right\} dx = $$

$$= \sqrt{2\pi}\sigma_q;$$

$$\left[\mu(X_q / H_k) \mu(X_q / H_l) \right]^{1/2} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_q^2} \left[(X_q - \overline{X}_{qk})^2 + (X_q - \overline{X}_{ql})^2 \right] \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{4\sigma_q^2} \left[2X_q^2 - 2X_q (\overline{X}_{qk} - \overline{X}_{ql}) + \overline{X}_{qk}^2 + \overline{X}_{ql}^2 \right] \right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_q^2}\left[X_q^2 - 2X_q\frac{\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}}{2} + \frac{\left(\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}\right)^2}{4} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\left(\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}\right)^2}{4} + \frac{\overline{X}_{qk}^2}{2} + \frac{\overline{X}_{ql}^2}{2}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_q^2}\left[\left(X_q - \frac{\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\overline{X}_{qk}-\overline{X}_{ql}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_q^2}\left(X_q - \frac{\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}}{2}\right)^2\right\} x$$

$$x \exp\left\{-\frac{1}{8\sigma_q^2}\left(\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}\right)^2\right\};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{\mu}\left(X_q / H_k\right)\hat{\mu}\left(X_q / H_l\right)\right]^{1/2} dX_q =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_q^2}\left(X_q - \frac{\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}}{2}\right)^2\right\}dx\right] \times$$

$$\times\left[\exp\left\{-\frac{1}{8\sigma_q^2}\left(\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}\right)^2\right\}\right] =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\left(\overline{X}_{qk}-\overline{X}_{ql}\right)^2}{8\sigma_q^2}\right\}\sqrt{2\pi}\sigma_q .$$

Тогда

$$I_q^{(k,l)} = 1 - \exp\left\{-\left(\overline{X}_{qk}+\overline{X}_{ql}\right)^2 \Big/ 8\sigma_q^2\right\}. \qquad (7)$$

Вычисляемые с использованием (6) или, в частном случае, (7) оценки информационной ценности контролируемого параметра обладают теми же свойствами, что и оценки (5). Полученное соотношение (7) дает однозначно трактуемые результаты оценки информационной ценности контролируемого параметра. Если функции принадлежности параметра гауссовы с одинаковой вариацией и отличаются только модальными значениями, то:

а) при равенстве модельных значений информационная ценность параметра равна нулю;

б) чем сильнее различие модальных значений, тем выше информационная ценность;

в) увеличение значения вариации контролируемого параметра, при прочих равных условиях, снижает его информационную ценность.

Выводы

Получена методика расчета информационной ценности контролируемых параметров в задаче дифференциальной диагностики состояний, принципиальным достоинством которой является простота расчетов. Предложенная методика распространена на случай, когда контролируемый параметр – нечеткое число с известной функцией принадлежности.

Список литературы

1. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.

2. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 .– 496 с.

3. Zadeh L. Fuzzy sets / L. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8(3). – P. 338-353.

4. Раскин Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.

Поступила в редколлегию 29.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ЦІННОСТІ НЕЧІТКИХ КОНТРОЛЬОВАНИХ ПАРАМЕТРІВ В ЗАДАЧІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ДІАГНОСТИКИ СТАНІВ

Н.В. Фіщукова, Т.І. Каткова, Я.В. Святкін

Розглянута задача вибору раціонального набору контрольованих параметрів при розробці діагностичних експертних систем. Для її вирішення введений критерій оцінки інформаційної цінності контрольованого параметра в задачі диференціальної діагностики. Запропонована методика розрахунку чисельного значення критерію. Отримані оцінки можуть бути використані для корекції набору контрольованих параметрів. Приведений приклад розрахунку для окремого випадку гауссових умовних щільностей розподілу випадкових значень параметра.

Ключові слова: *експертні системи, контрольований параметр, інформаційна цінність.*

A METHOD OF CALCULATION OF INFORMATIVE VALUE OF THE UNCLEAR CONTROLLED PARAMETERS IS IN TASK OF DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS OF THE STATES

N.V. Fischukova, T.I. Katkova, Ya.V. Svyatkin

The task of choice of rational set of the controlled parameters is considered at development of diagnostic consulting models. For its decision the criterion of estimation of informative value of the controlled parameter is entered in the task of differential diagnostics. The method of calculation of numeral value of criterion is offered. The got estimations can be utillized for the correction of set of the controlled parameters. The example of calculation is resulted for the special case of gauss of conditional frequency distribution of parameter casual values .

Keywords: *consulting models, controlled parameter, informative value.*