УДК 681.03

В.И. Барсов, Е.А. Сотник, Е.А. Контылева

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИАГНОСТИКИ ОШИБОК СПЕЦПРОЦЕССОРА ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕГО НА ОСНОВЕ КОДОВ МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрены известные модели процесса диагностики ошибок спецпроцессора обработки информации, функционирующего в модулярной системе счисления, которые ввиду ряда недостатков не способны удовлетворить требования к его эффективности. Предложена математическая модель, которая основывается на параллельной коррекции цифр по основаниям входящим в первоначальную альтернативную совокупность. Данная модель не содержит недостатков известных аналогов и способна стать основой для создания эффективной системы диагностики ошибок спецпроцессора обработки информации в динамике вычислительного процесса.

Ключевые слова: *модулярная система счисления, альтернативная совокупность, стягивание альтернативных совокупностей, принятие гипотезы об ошибочном основании, параллельная коррекция.*

Введение

На сегодняшний день широко известны две математические модели диагностики ошибок спецпроцессора обработки информации (СПОИ), функционирующего в модулярной системе счисления (МСС) [1]:

Математическая модель, описывающая процесс стягивания условных альтернативных совокупностей к одному, являющемуся ошибочным – основывается на том, что если в упорядоченной системе оснований $m_1, m_2, ..., m_n, m_{n+1}$ задано неправильное число $\tilde{A}$, имеющее альтернативную совокупность

$$W(\tilde{A}) = (m_{i1}, m_{i2}, ..., m_{ik}),$$

и если при выполнении над числом $\tilde{A}$ рациональной операции по программе было получено неправильное число $\tilde{B}$, альтернативная совокупность которого равна

$$W(\tilde{B}) = (\overline{m}_{i1}, \overline{m}_{i2}, ..., \overline{m}_{ik}),$$

то ошибочной может быть цифра по какому-либо из оснований

$$(m_{j1}, m_{j2}, ..., m_{jk}) = W(\tilde{A}) W(\tilde{B}),$$

где умножение понимается в смысле пересечения.

Это логично, поскольку среди альтернативных совокупностей $W(\tilde{A})$ и $W(\tilde{B})$ всегда содержится ошибочное основание, а значит если в $W(\tilde{A})$ есть такие основания, которых нет в $W(\tilde{B})$ и наоборот, то, очевидно, что среди них нет ошибочного.

Под условной альтернативной совокупностью $\tilde{W}(\tilde{A})$ неправильного числа $\tilde{A}$ понимается совокупность оснований, по которым возможна ошибка, с учетом характера альтернативных совокупностей предшествующих неправильных результатов по ходу выполнения программы.

Для математической модели, основывающейся на предположении об ошибочности одного из оснований, логично следующее утверждение.

Пусть в упорядоченной системе оснований $m_1, m_2, ..., m_n, m_{n+1}$ задано неправильное число $\tilde{A}$, с альтернативной совокупностью $W(\tilde{A})$, в которую входит основание m_j и задано, что в случае принятия гипотезы неправильности цифры a'_j по основанию m_j последняя должна исправиться на a_j. Тогда, если при вычислении некоторой рациональной функции f($\tilde{A}$):

$$\tilde{C} = f(\tilde{A}) = (\gamma'_1, \gamma'_2, ..., \gamma'_j, ..., \gamma'_n, \gamma'_{n+1}),$$

такой, что

$$\gamma'_j = f(a'_j) = f(a_j),$$

получаем в результате неправильное число $\tilde{C}$, то цифра a'_j не может быть ошибочной. Действительно, если цифра a'_j ошибочна, то правильной являет-ся цифра a_j. Так как при вычислении $\tilde{C}$ цифра γ_j получается такой же, как если бы в $\tilde{A}$ по основанию m_j была правильная цифра a_j, то $\tilde{C}$ должно быть правильным числом. Соответственно факт неправильности $\tilde{C}$ опровергает предположение об ошибочности цифры a'_j.

В случае с моделью, основывающейся на стягивании альтернативных совокупностей, процесс обнаружения ошибки требует определения всех проекций числа после каждого действия над неправильным числом $\tilde{A}$, что в свою очередь уменьшает скорость диагностики. Кроме того, контрольное основание всегда будет входить в УАС и, соответственно, всегда будет оставаться вероятность ошибочной диагностики.

В свою очередь, математическая модель допущения о месте нуждается в возврате к месту исправления в случае принятия неверной гипотезы, что приводит к повторному выполнению ряда операций вычислительной цепи, и, как результат, уменьшению скорости обработки информации и невозможности организовать эффективные контроль и диагностику в динамике вычислительных действий.

Таким образом, возникает необходимость разработки математической модели процесса диагностики СПОИ, функционирующего в модулярной системе счисления в динамике вычислительно процесса, гарантированно определяющей основание, по которому произошла ошибка.

Основная часть

Пусть задана упорядоченная ($m_i < m_i + 1$) МСС набором взаимно попарно простых чисел $m_1, m_2,\ldots, m_n, m_n+1$, где n и k – соответственно количество информационных и контрольных оснований, а кратность МСС определится величиной k/n.

Таким образом, получаем избыточную СОК, для которой

$$A < \prod_{i=1}^{n} m_i .$$

Будем называть диапазон $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ – рабочим, а диапазон $M_1 = M \cdot m_{n+1}$ – полным диапазоном.

Из определения следует, что элементами кодового разрешенного множества, которые могут быть использованы в информационной системе, являются целые положительные числа рабочего диапазона, представленные в СОК по системе из модулей. В таком случае числа, которые участвуют в операциях, должны лежать в диапазоне [0,M).

Если же в результате какой-либо операции было получено число A, большее M, то это значит, что при проведении операции была допущена ошибка.

Это легко доказать. Как уже говорилось, система упорядочена, т.е. $m_i < m_{n+1}$. Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n, a_{n+1})$ – правильное число.

Тогда число

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, \ldots, \tilde{a}_i \ne a_i, \ldots, a_n, a_{n+1}),$$

где i=1,2,…,n,n+1 – является неправильным. Правильность числа A по определению означает, что

$$A < \frac{M_1}{m_{n+1}}, \tag{1}$$

но так как

$$\frac{M_1}{m_i} > \frac{M_1}{m_{n+1}},$$

$$i = 1,2,\ldots,n+1,$$

то тем более

$$A < \frac{M}{m_i}.$$

Коль скоро $\tilde{a}_i \ne a_i$, число $\tilde{A}$ не может находиться в интервале $\left[0, \frac{M}{m_i}\right)$, следовательно

$$\tilde{A} > \frac{M}{m_i}, \tag{2}$$

а тогда имеет место

$$\tilde{A} > \frac{M_1}{m_{n+1}},$$

т.е. $\tilde{A}$ является неправильным числом.

Таким образом, любое искажение цифры по одному какому-либо разряду превращает это число в неправильное и тем самым позволяет обнаружить наличие искажения. Более того, существует только одно-единственное значение этой цифры, которое может превратить неправильное число в правильное.

Неравенство (2) тождественно неравенству

$$A < m_1 m_2, \ldots, m_{i-1} m_{i+1}, \ldots, m_{n+1},$$

и, следовательно, число A может быть единственным образом представлено своими остатками по этим основаниям. Из этого следует, что

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_i = A_{n+1} < \frac{M_1}{m_{n+1}}, \tag{3}$$

где $A_1, A_2,\ldots,A_n$ – проекции числа A, полученные зачеркиванием цифры a_i этого числа, по основанию m_i.

С учетом (1) можно утверждать, что для правильного числа имеют место неравенства

$$A < \frac{M_1}{m_{n+1}} < \frac{M_1}{m_n} < \ldots < \frac{M_1}{m_i} < \ldots < \frac{M_1}{m_1}, \qquad (4)$$

и в соответствии с (3) величину A сохранит его проекция по каждому из оснований. Тогда, согласно (3) и при условии, что возможна только единичная ошибка, если проекция A_i числа

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n, a_{n+1})$$

по основанию m_i удовлетворяет условию

$$A_i > \frac{M_1}{m_{n+1}}, \qquad (5)$$

то цифра a_i правильная. Это легко продемонстрировать доказательством от противного.

Допустим, что цифра a_i неправильная. Поскольку ошибка может быть только одна, остальные цифры правильные. Следовательно, проекция A_i, как составленная из правильных цифр, должна быть правильным числом. А это противоречит условию (5), тем самым доказывая несостоятельность допущения об ошибочности цифры a_i.

Определение 1. k-Альтернативно-корректируемым числом называется неправильное число $\tilde{A}$, если существует k таких правильных чисел A_1, $A_2, \ldots, A_k$, каждое из которых отличается от $\tilde{A}$ цифрой по одному какому-либо основанию, причем эти основания различны для различных A_n (n = 1, 2, …, k).

Определение 2. Альтернативной совокупностью числа $\tilde{A}$ называется совокупность оснований $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, по которым числа $A_1, A_2, \ldots, A_k$ отличаются от $\tilde{A}$.

Будем обозначать альтернативную совокупность числа $\tilde{A}$ как $W(\tilde{A})$. Стоит обратить внимание, что основание m_n+1 всегда входит в альтернативную совокупность любого числа $\tilde{A}$. Действительно, каковы бы ни были первые n его цифр, всегда найдется такая цифра по основанию m_n+1, что число, имеющее по данному основанию цифру ε, лежит в диапазоне $\left[0, \frac{M}{m_i}\right)$, являясь правильным числом.

Учитывая соотношения (4) и (5) если проекция A_i неправильного числа $\tilde{A}$ удовлетворяет неравенству

$$A_i < \frac{M_1}{m_{n+1}}, \qquad (6)$$

то цифра a_i – неправильная, и основание m_i, по которому была получена проекция A_i, входит в альтернативную совокупность данного числа $\tilde{A}$.

Действительно, предположим, проекция $\tilde{A}_i$ является правильным числом.

Поскольку среди последовательности чисел

$$\tilde{A}_{i,1}, \tilde{A}_{i,2}, \ldots, \tilde{A}_{i,m_i-1}$$

всегда содержится число $\tilde{A}_{i\xi}$, меньшее $\frac{M}{m_i}$, то это число равно проекции $\tilde{A}_i$, поскольку проекция $\tilde{A}_i$, по предположению, находится в диапазоне $\left[0, \frac{M}{m_i}\right)$ и цифры $\tilde{A}_i$ совпадают с соответствующими цифрами $\tilde{A}_{i\xi}$ (за исключением, естественно, цифры по основанию m_i).

Все числа последовательности отличаются от $\tilde{A}_{i\xi}$ на различные кратные $B_i = \frac{l_i M}{m_i}$ (где l – вес ортогонального базиса), т.е. любое число этой последовательности, в частности и $\tilde{A} = \tilde{A}_{i,a'}$ может быть записано в виде

$$\tilde{A} = kl_i \frac{M}{m_i} + \tilde{A}_{i\xi} = K\frac{M}{m_i} + \tilde{A}_{i\xi} = K\frac{M}{m_i} + \tilde{A}_i.$$

Здесь $km_i = lm_i + K$ заменено на К, поскольку

$$lm_i \frac{M}{m_i} = lM$$

составляет число, кратное принятому диапазону М. Очевидно, К есть не что иное, как целая часть от деления $\tilde{A}$ на $\frac{M}{m_i}$ и, следовательно,

$$\tilde{A}_{i\xi} = \tilde{A}_i = \tilde{A} - \left[\frac{\tilde{A}m_i}{M}\right]\frac{M}{m_i}.$$

Таким образом, если $\tilde{A}_i$ – правильное число, то среди чисел $\tilde{A}_{i,1}, \tilde{A}_{i,2}, \ldots, \tilde{A}_{i,m_i-1}$ содержится число $\tilde{A}_{i\xi}$, являющееся правильным числом, т.е. m_i входит в альтернативную совокупность числа $\tilde{A}$.

Из вышесказанного с учетом неравенства (6) получаем альтернативную совокупность неправильного числа $\tilde{A}$:

$$W(\tilde{A}) = (m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{in}). \qquad (7)$$

Предположим над неправильным числом $\tilde{A}$ и правильным числом В производится некоторая арифметическая операция

$$C = \tilde{A} \otimes B. \qquad (8)$$

Согласно основным свойствам СОК все действия проводятся над каждым вычетом отдельно, тогда перепишем (8) следующим образом:

$$C = \\ = (a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, ..., \tilde{a}_i \otimes b_i, ..., a_{n+1} \otimes b_{n+1}). \quad (9)$$

В результате данной операции, число C будет правильным числом только в случае, если цифра числа B по тому же основанию, что и ошибочное основание числа $\tilde{A}$, равна нулю.

Допустим худшую вероятность, когда эта цифра не равна нулю.

Как видно из (9), ошибка в неправильном числе $\tilde{A}$ не может распространиться на другие основания. Из этого следует, что основания, входящие в альтернативную совокупность числа $\tilde{C}$, полученного в результате арифметической операции над неправильным числом $\tilde{A}$ и правильным числом B, должны быть теми же, что и в (7). Соответственно для определения альтернативной совокупности $W(\tilde{C})$ достаточным будет вычислить значения проекций по основаниям, входящим в альтернативную совокупность $W(\tilde{A})$.

Основания, по которым будет выполняться условие (6), войдут в альтернативную совокупность числа $\tilde{C}$. Иными словами

$$W(\tilde{C}) = W(\tilde{A}) \wedge W(\tilde{A} + B). \quad (10)$$

Как уже было доказано, в диапазоне $\left[0, \frac{M}{m_i}\right)$ может находиться только правильное число, при условии, что возможно только единичная ошибка по одному из оснований. Значит, коррекция известными методами цифры по ошибочному основанию, входящему в альтернативную совокупность $W(\tilde{A})$, приведет к выполнению условия (1) и, значит, в результате арифметической операции с правильным числом B получим правильное число C:

$$C = A \otimes B.$$

В ином случае, коррекция, проведенная по правильному основанию, входящему в альтернативную совокупность $W(\tilde{A})$, приведет к возникновению двойной ошибки и согласно неравенству (2) гарантированно будет определено и приведет к выполнению (8) (при условии, что цифра по контрольному основанию, в совокупности с ошибочными не приведет к выполнению условия (1)).

Ввиду этого с учетом (7) и (9) можем записать, что

$$C = (a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, ..., \tilde{a}_i \otimes b_i, ..., a_{n+1} \otimes \\ \otimes b_{n+1}; a'_{j1} \otimes b_{j1}, a'_{j2} \otimes b_{j2}, ..., a'_{jm} \otimes b_{jm}), \quad (11)$$

где $a'_{j1}, a'_{j2}, ..., a'_{jm}$ – скорректированные цифры по основаниям, входящим в $W(\tilde{A})$.

Таким образом, одна из цифр a'_{ji} – скорректирована верно, остальные ошибочны и гарантированно приведут к удвоению ошибки.

Известно, что значение числа A в ПСС определяется следующим образом:

$$A = a_1B_1 + a_2B_2 + ... + a_nB_n \bmod(M), \quad (12)$$

где B_i – ортогональный базис.

Согласно с (11):

$$C = (c_1, c_2, ..., \tilde{c}_i, ..., c_{n+1}; c'_{j1}, c'_{j2}, ..., c'_{jm}). \quad (13)$$

Перепишем (12) с учетом (13):

$$\begin{aligned} C_{j1} &= c'_{j1}B_{j1} + ... + c_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ C_{ji-1} &= c_1B_1 + ... + c'_{ji-1}B_{ji-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ C_{ji} &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + c'_{ji}B_{ji} + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ C_{ji+1} &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c'_{ji+1}B_{ji+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{jm} &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c'_{jm}B_{jm} \bmod(M). \end{aligned} \quad (14)$$

Т.к. только коррекция неправильной цифры приводит к исправлению ошибки, а коррекция неправильной – к ее удвоению, можем переписать (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1 &= \tilde{c}_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ C_{i-1} &= c_1B_1 + ... + \tilde{c}_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ C_i &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + c_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ C_{i+1} &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ \tilde{c}_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + \tilde{c}_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + \tilde{c}_nB_n \bmod(M). \end{aligned} \quad (15)$$

Как видно из (15), в выражении

$$\begin{aligned} C_i &= c_1B_1 + ... + c_{i-1}B_{i-1} + c_iB_i + \\ &+ c_{i+1}B_{i+1} + ... + c_nB_n \bmod(M) \end{aligned} \quad (16)$$

ошибка отсутствуют, что значит условие (1) выполняется и коррекция проведена успешно.

Т.е. в (16):

$$C_i < \frac{M}{m_{n+1}}.$$

Выводы

1. Проведен анализ известных математических моделей процесса диагностики ошибок спецпроцессора обработки информации, функционирующего в модулярной системе счисления. Определено, что существующие модели, основанные на стягивании альтернативных совокупностей и на допущении о номере искаженного основания, не в полной мере способны удовлетворить существующие требования к эффективности диагностики в динамике вычислительного процесса.

2. Предложенная в статье математическая модель процесса диагностики ошибок, основанная на параллельной коррекции оснований, входящих в альтернативную совокупность, имеет следующие достоинства:

- отсутствие неоднозначности стягивания, в котором варианты возможных ошибочных оснований сводятся чаще всего к двум (т.к. контрольное всегда входит в АС);
- отсутствие необходимости возврата к месту коррекции в случае ее ошибочности, что в свою очередь позволяет организовать эффективный процесс диагностики в динамике вычислительного процесса;
- возможность эффективно диагностировать самокоррекцию числа, в случаях, когда она превращает проверяемое число в правильное, но не истинное;
- отсутствие алгоритмически сложных операций (как в случае с нулевизацией).

Список литературы

1. *Модели и методы повышения отказоустойчивости и производительности управляющих вычислительных комплексов специализированных систем управления реального времени на основе применения непозиционных кодовых структур модулярной арифметики: моногр. / [В.И. Барсов, Л.С. Сорока, В.А. Краснобаев, Хери Али Абдуллах]. – Х.: МОН, УИПА, 2008. – 147 с.*
2. *Червяков Н.И. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем / [Н.И. Червяков, П.А. Сахнюк, А.В. Шапошников, С.А. Ряднов]; под. ред. Н.И. Червякова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.*
3. *Жихарев В.Я. Влияние системы счисления на надёжность ЭВМ / В.Я. Жихарев, Я.В. Илюшко, В.А. Краснобаев // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2004. – № 1. – С. 98-104.*
4. *Сиора А.А. Концепция создания быстродействующих и надёжных вычислительных систем и средств обработки цифровой информации на основе использования кодов модулярной арифметики / А.А. Сиора, В.А. Краснобаєв, А.А. Замула, В.И. Барсов, Ж.В. Дейнеко, О.Е. Барыльник // Прикладная радиоэлектроника: Научно-технический журнал. – Х.: ХНУРЭ, 2008. – Том 7, № 3. – С. 317-321.*

Поступила в редколлегию 3.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, ст. научн. сотр. Е.С. Козелкова, Государственный университет телекоммуникаций, Киев.

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ДІАГНОСТИКИ ПОМИЛОК СПЕЦПРОЦЕСОРА ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ, ЩО ФУНКЦІОНУЄ НА ОСНОВІ КОДІВ МОДУЛЯРНОЇ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

В.І. Барсов, Є.О. Сотник, О.О. Контилева

Розглянуто відомі моделі процесу діагностики помилок СПОІ функціонуючого в МСС, які, зважаючи на низку недоліків, не здатні задовольнити вимоги до його ефективності. Запропоновано математичну модель, яка ґрунтується на паралельній корекції цифр з основ, що входять до первісної альтернативної сукупності. Дана модель не містить недоліків відомих аналогів і здатна стати основою для створення ефективної системи діагностики помилок СПОІ в динаміці обчислювального процесу.

***Ключові слова**: модулярна система числення, альтернативна сукупність, стягування альтернативних сукупностей, прийняття гіпотези про помилкову основу, паралельна корекція.*

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS ERROR DIAGNOSTICS SPECIAL INFORMATION PROCESSOR OPERATES ON THE BASIS CODES MODULAR NUMBER SYSTEM

V.I. Barsov, Ye.A. Sotnik, Ye.A. Kontileva

The known model of the process error diagnostics SIP operating in MNS that due to a number of shortcomings are not able to meet the requirements of its effectiveness. A mathematical model, which is based on a parallel correction numbers on the grounds included in the original set of alternative. This model does not include the drawbacks of known analogues and can be the basis for an effective system of fault diagnosis SIP in the dynamics of the computational process.

***Keywords**: modular number system, a set of alternative, alternative sets of contraction, the adoption of the hypothesis on the basis of an erroneous parallel correction.*