

УДК 004.722

О.І. Тиртишніков, О.О. Ботвін, В.В. Сенько

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава

ОЦІНЮВАННЯ СТУПЕНЮ АСИМЕТРИЧНОСТІ ТА ТОПОЛОГІЧНОЇ ВАРТОСТІ СТАТИЧНИХ КОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

Розглянута класифікація асиметричних статичних комунікаційних мереж багатопроцесорних комп'ютерних систем за ступенем асиметричності на основі граничних значень коефіцієнта симетрії. Для деяких простих мереж приведені результати оцінювання змінювання ступеню асиметричності при їх масштабуванні. Запропонований загальний підхід для оцінювання надлишкової топологічної вартості вузлових засобів комутації на етапі топологічного синтезу асиметричної мережі.

Ключові слова: комунікаційна мережа, коефіцієнт симетрії мережі, топологічна вартість мережі, топологічний синтез мережі.

Вступ

У багатопроцесорних комп'ютерних системах (БПКС) з розподіленою пам'яттю комунікаційна мережа (КМ) є ключовою підсистемою з точки зору забезпечення високої продуктивності та надійності функціонування системи в цілому [3, 5, 9].

КМ можуть бути симетричними та асиметричними. Всі вузли симетричних КМ мають однаковий порядок. Ознакою асиметричних КМ є наявність вузлів різних порядків, тобто вузлові засоби комутації повинні мати різну кількість комунікаційних портів. Але при побудові реальних асиметричних КМ іноді вважається доцільним, з точки зору оптимізації серійного виробництва, виготовляти всі процесорні елементи (ПЕ) БПКС з однаковою (максимальною необхідною) кількістю комунікаційних портів d_{max} . При такому підході, очевидно, частина комунікаційних портів деяких ПЕ буде залишатися незадіяною.

Тому завдання оцінювання надлишкової вартості незадіяних вузлових засобів комутації на етапі топологічного синтезу асиметричної КМ є актуальним. Розв'язання цього завдання і є метою даної роботи.

Визначення коефіцієнта симетрії

Якщо позначити: N – кількість вузлів, I – кількість зв'язків між вузлами, мережі, d_{max} – максимальний порядок вузла асиметричної КМ, то, очевидно, загальна кількість портів всіх її вузлів буде складати $P = Nd_{max}$ за умови, що всі ПЕ БПКС мають максимально необхідну кількість комунікаційних портів d_{max} . Відповідно, кількість задіяних портів всіх вузлів КМ – $p = 2I$. Відношення цих двох величин можна розглядати як коефіцієнт симетрії мережі:

$$K_s = \frac{2I}{d_{max} N}, \quad (1)$$

Даний показник дозволяє оцінити ступень асиметричності КМ при визначеній кількості вузлів, а також аналізувати тенденцію змінювання цього ступеню при збільшенні кількості вузлів (масштабуванні мережі). Очевидно, для всіх симетричних КМ $d = d_{max}$ (порядок всіх вузлів однаковий), тому для них $K_s = 1$.

Класифікація простих мереж за ознакою ступеню асиметричності

До КМ простіших топологій традиційно відносять лінійні, зіркоподібні, деревовидні та кільцеві (іноді перші три взагалі не розглядаються як мережі [3], що, на наш погляд, не виправдано обмежує ступень узагальненості аналізу). Серед них тільки кільцева структура є симетричною, інші є асиметричними. Коефіцієнти симетрії для лінійної (K_{sl}), зіркоподібної (K_{ss}) та найпростішої деревовидної типу «двійкове дерево» (K_{st}) структур визначаються наступними виразами:

$$K_{sl} = \frac{2(N-1)}{2N} = \frac{N-1}{N}; N \geq 3, \quad (2)$$

$$K_{ss} = \frac{2(N-1)}{N(N-1)} = \frac{2}{N}; N \geq 3, \quad (3)$$

$$K_{st} = \frac{2(N-1)}{3N}; N \geq 7. \quad (4)$$

Тут і в подальшому для подібних виразів вказується мінімальна кількість вузлів, необхідна для побудови найпростішої структури визначеної топології.

З виразів (2–4) маємо:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{sl} = 1.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{ss} = 0.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{st} = 2/3.$$

Графіки функції $K_s = f(N)$ для структур простіших асиметричних топологій побудовані на рис. 1.

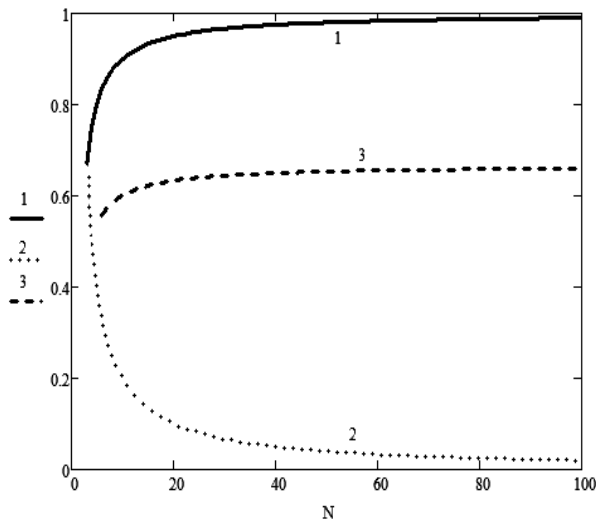


Рис. 1. Графіки функції $K_s=f(N)$ для структур простіших асиметричних топологій: 1 – лінійна топологія, 2 – зіркоподібна топологія, 3 – «двійкове дерево»

Таким чином, за ознакою тенденції змінювання ступеню асиметричності при збільшенні кількості вузлів простіші асиметричні КМ можна розподілити на три класи: лінійна топологія є неповністю симетричною (K_{st} збільшується та наближається до одиниці при нескінченному збільшенні кількості вузлів), топологія «двійкове дерево» є асиметричною (K_{st} збільшується та наближається до константи, що менше за одиницю), зіркоподібна топологія є гранично асиметричною (K_{st} зменшується, прямує до нуля).

Деревовидні топології

В теорії графів лінійна та зіркоподібна структури розглядаються як варіанти дерев [6], але, як вже було показано, за ознакою тенденції змінювання ступеню асиметричності при їх масштабуванні, вони є принципово різними.

Якщо вважати простими деревовидними мережами клас дерев, що відрізняються кратністю (коефіцієнтом розгалуження дерева $k \geq 2$), то для дерев фіксованої кратності k кількість зв'язків складає $I=N-1$, $d_{max}=k+1$. Тому:

$$K_{st} = \frac{2(N-1)}{N(k+1)}; N \geq 1+k+k^2, \quad (5)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{st} = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{d_{max}}. \quad (6)$$

З (5) видно, що максимальний коефіцієнт симетрії серед всіх можливих дерев має «двійкове дерево».

На рис. 2, як приклад, побудовані графіки функції $K_{st}(k)$ для дерев кратності $k=2-5$ на основі виразів (5, 6):

$$K_{st}(3) = \frac{N-1}{2N}; N \geq 13,$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} K_{st}(3) &= 0,5, \\ K_{st}(4) &= \frac{2(N-1)}{5N}; N \geq 21, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} K_{st}(4) &= 0,4, \\ K_{st}(5) &= \frac{N-1}{3N}; N \geq 31, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} K_{st}(5) &= 1/3. \end{aligned}$$

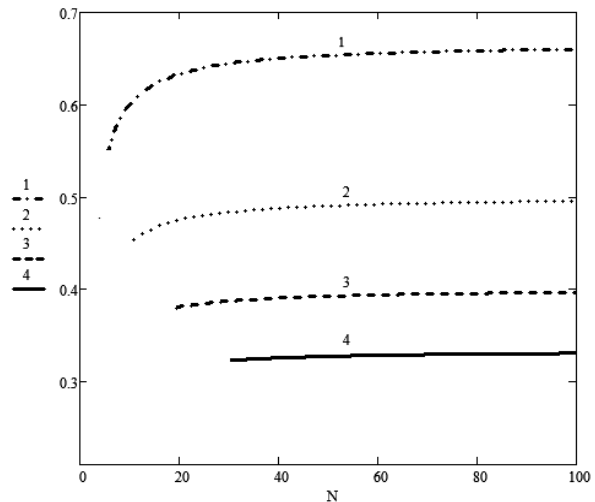


Рис. 2. Графіки функції $K_s = f(N)$ для дерев фіксованої кратності: 1 – $k=2$, 2 – $k=3$, 3 – $k=4$, 4 – $k=5$

Решітчасті та кубічні топології

Решітчасті двомірні мережі можна отримати шляхом багаторазового копіювання лінійної структури (наприклад, m разів), що має визначену кількість вузлів, з наступним з'єднанням відповідних вузлів додатковими зв'язками. Аналогічно трьохмірна решітка є результатом виконання тих самих операцій над двомірною. Таким чином, всі двомірні та трьохмірні решітчасті мережі (останні часто називають кубічними) будуються на основі базової лінійної структури. Наприклад, отримаємо вирази виду $K_s = f(N)$ для групи решітчастих структур (двомірна та трьохмірна решітки, «ланцюжок кубів» та «шар кубів»), структурно-топологічні властивості яких були докладно розглянуті в [8].

У виразах (7 – 9) m – параметр, що визначає розмір решітки N .

Для двомірної решітки розміром $N = m^2$:

$$K_{sa} = \frac{2 \cdot 2m(m-1)}{4m^2} = 1 - \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}; \quad (7)$$

$$N \geq 4.$$

Для трьохмірної решітки (кубічної топології) розміром $N = m^3$:

$$K_{scl} = \frac{2 \cdot 3m^2(m-1)}{6m^3} = 1 - \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{N}}; \quad (8)$$

$$N \geq 8.$$

Для структури типу «ланцюжок кубів» розміром $N = 4m$:

$$K_{sc2} = \frac{2(2N - 4)}{4N} = 1 - \frac{2}{N}; N \geq 8 \quad (9)$$

Для структури типу «шар кубів» розміром $N=2m^2$:

$$K_{sc3} = \frac{2(5m^2 - 4m)}{5 \cdot 2m^2} = 1 - \frac{0,8}{m} = 1 - 0,8\sqrt{2/N}; \quad (10)$$

$$N \geq 8.$$

Для всіх розглянутих структур решітчастих топологій

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_s = 1,$$

тобто вони, як і базова лінійна, є неповністю симетричними. При цьому у всіх решіток при будь-якому значенні N коефіцієнт симетрії менше, чим у лінійної структурі з тією ж самою кількістю вузлів.

Також слід відзначити, що збільшення мірності решітки приводить до збільшення ступеню її асиметричності.

На рис. 3 побудовані графіки функції $K_{si}(k)$, $K_{sa}(k)$, $K_{sc}(k)$ для лінійної та решітчастих структур на основі виразів (2, 7-10):

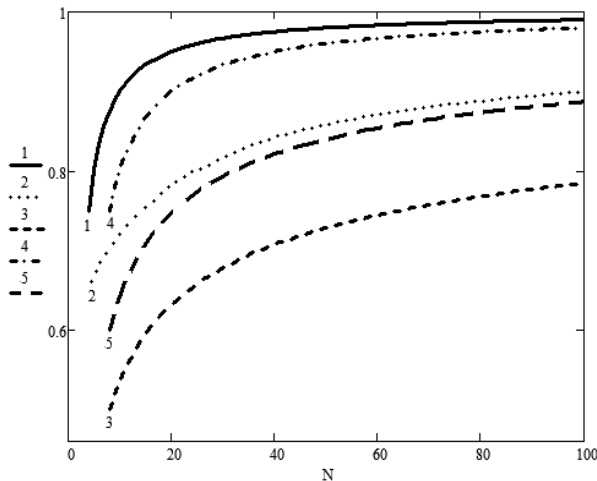


Рис. 3. Графіки функції $K_{si}(k)$, $K_{sa}(k)$, $K_{sc}(k)$:
1 – лінійна топологія, 2 – двомірна решітка,
3 – кубічна топологія, 4 – «ланцюжок кубів»,
5 – «шар кубів»

Оцінювання топологічної вартості асиметричних комунікаційних мереж

При топологічному проектуванні КМ звичайно вважають, що технічні характеристики вузлів та ребер, що складають мережу, однакові [1]. [2]. Тоді, якщо C_1 – вартість вузла, а C_2 – вартість ребра, вартість КМ [1]:

$$C[n, m] = C_1N + C_2I. \quad (11)$$

Розв’язання завдання проектування КМ можна подати як вибір кількості ребер та їх розподіл між вузлами таким чином, щоб отримати необхідні значення надійності, пропускної здатності, максималь-

ного діаметра та інших характеристик мережі. В цьому випадку зручно використовувати відносну вартість мережі [1]:

$$\frac{C[N, I]}{C_1N} = 1 + C_2I / C_1N = 1 + \delta \frac{I}{N}, \quad (12)$$

де $\delta = C_2/C_1$.

Вартість апаратури, що знаходиться у вузлі КМ, складається із вартості обчислювальних засобів та засобів комутації. Якщо вартість останніх пропорційна кількості ліній зв’язку, що комутуються у вузлі, то загальна вартість засобів комутації у мережі буде пропорційна $2I$ та може бути врахована у вартості ребер мережі [2].

Очевидно, що для КМ асиметричних топологій, якщо всі ПЕ мають однакову кількість комунікаційних портів d_{max} , умова пропорційності вартості засобів комутації кількості ліній зв’язку, що комутуються у вузлі, не виконується.

В результаті виникає надлишкова вартість засобів комутації, пропорційна кількості незадіяних портів $P-p$.

Відповідно, урахування надлишкової вартості засобів комутації у вартості ребер мережі в цьому випадку неможливе.

Якщо вважати величину C_1 вартістю вузла без засобів комутації, а вартість окремого порту позначити як C_3 , відносна вартість мережі з урахуванням незадіяних портів складає:

$$\frac{C[N, I, P]}{C_1N} = 1 + \delta \frac{I}{N} + \beta d_{max}. \quad (13)$$

де $\beta = C_3/C_1$.

Відповідно, відносна вартість мережі без урахування незадіяних портів:

$$\frac{C[N, I, p]}{C_1N} = 1 + (\delta + 2\beta) \frac{I}{N}. \quad (14)$$

Тоді надлишкову відносну вартість засобів комутації асиметричної мережі C_k можна визначити як різницю двох останніх виразів:

$$C_k(N) = \frac{C[N, I, P]}{C_1N} - \frac{C[N, I, p]}{C_1N} = \beta \left(d_{max} - 2 \frac{I}{N} \right). \quad (15)$$

Якщо виразити d_{max} через коефіцієнт симетрії K_s , отримуємо іншу форму останнього виразу:

$$C_k(N) = \beta \left(\frac{2I}{NK_s} - \frac{2I}{N} \right) = 2\beta \frac{I(1 - K_s)}{NK_s}. \quad (16)$$

Очевидно, що для всіх симетричних КМ $C_k = 0$.

На основі проведеного аналізу можна стверджувати, що серед всіх можливих асиметричних мереж при заданій кількості вузлів максимальний коефіцієнт симетрії має структура лінійної топології, а мінімальний – зіркоподібної топології.

Відповідно, з виразів (2, 4, 15) можна отримати нерівність для оцінювання границь діапазону, в якому може знаходитися значення надлишкової відносної вартості засобів комутації будь-якої асиметричної мережі при заданій кількості вузлів:

$$\beta \left(2 - 2 \frac{N-1}{N} \right) \leq C_k(N) \leq \beta \left(N - 1 - 2 \frac{N-1}{N} \right).$$

Після виконання нескладних перетворень, остаточно маємо:

$$0 \leq \frac{C_k(N)}{\beta} - \frac{2}{N} \leq N - 3. \quad (17)$$

Висновки

Коефіцієнт симетрій КМ дозволяє оцінити ступень асиметричності мереж різних топологій при визначеній кількості вузлів, а також аналізувати тенденцію змінювання цього ступеню при збільшенні кількості вузлів (масштабуванні мережі).

Вже на рівні структур КМ найпростіших топологій можна, за ознакою тенденції змінювання ступеню асиметричності при збільшенні кількості вузлів, виділити три класи асиметричних КМ: неповністю симетричні, асиметричні та гранично асиметричні.

Всі дерева фіксованої кратності k є асиметричними, найменший ступень асиметрії серед них має «двійкове дерево».

Структури решітчастих топологій є неповністю симетричними. При цьому у всіх решіток при будь-якому значенні N коефіцієнт симетрії менше, чим у лінійної структури з той самою кількістю вузлів. Збільшення мірності решітки приводить до збільшення її асиметричності.

Запропонований підхід до оцінювання топологічної вартості асиметричних КМ дозволяє враховувати особливості побудови реальних мереж у випад-

ках, коли умова пропорційності вартості засобів комутації кількості ліній зв'язку, що комутуються у вузлі, не виконується.

Запропоновані вирази для оцінювання надлишкової відносної вартості засобів комутації асиметричної мережі (15, 16, 17).

Список літератури

1. Артамонов Г.Т. Топология регулярных вычислительных сетей и сред / Г.Т. Артамонов. – М.: Радио и связь, 1985. – 192 с.
2. Евреинов Э.В. Однородные вычислительные системы, структуры и среды / Э.В. Евреинов. – М.: Радио и связь, 1981. – 207 с.
3. Орлов С.А. Организация ЭВМ и систем: Учебник для вузов / С.А. Орлов, Б.Я. Цилькер. – СПб.: Питер, 2011. – 688 с.
4. Артамонов Г.Т. Топология сетей ЭВМ и микропроцессорных систем / Г.Т. Артамонов, В.Д. Тюрин. – М.: Радио и связь, 1991. – 248 с.
5. Корнеев В.В. Параллельные вычислительные системы / В.В. Корнеев. – М.: Нолидж, 1999. – 320 с.
6. Харари Ф. Теория графов / Фрэнк Харари. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.
7. Пинчук В.П. Базовые графы для построения топологии многопроцессорных систем / В.П. Пинчук // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 46-58.
8. Тиртышников О.І. Властивості статичних комунікаційних мереж тороїдально-кубічних топологій / О.І. Тиртышников, І.В. Додох // Системи управління, навігації та зв'язку. – Полтава: ПолтНТУ, 2014. – Вип. 2(30). – С. 60-63.
9. Dally W.J. Principles and practices of interconnection networks / W.J. Dally, B. Towles. – Elseiver, 2004. – 550 p.

Надійшла до редколегії 11.11.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Л. Ляхов, Полтавський національний технічний університет ім. Ю. Кондратюка, Полтава.

ОЦЕНИВАНИЕ СТЕПЕНИ АСИММЕТРИЧНОСТИ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТОИМОСТИ СТАТИЧЕСКИХ КОМУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

А.И. Тыртышников, А.А. Ботвин, В.В. Сенько

Рассмотрена классификация асимметричных статических коммуникационных сетей многопроцессорных компьютерных систем по степени асимметричности на основе предельных значений коэффициента симметрии. Для некоторых простых сетей приведены результаты оценивания изменения степени асимметричности при их масштабировании. Предложен общий подход для оценивания избыточной топологической стоимости узловых средств коммутации на этапе топологического синтеза асимметричной сети.

Ключевые слова: коммуникационная сеть, коэффициент симметрии сети, топологическая стоимость сети, топологический синтез сети.

THE EVALUATION OF ASSYMETRY DEGREE AND TOPOLOGICAL VALUE OF STATIC COMMUNICATION NETWORKS

O.I. Tyrtysnikov, O.O. Botvin, V.V. Sen'ko

The classification of asymmetric static communication networks of multiprocessor computer systems is considered in the article according to the asymmetry degree on the basis of limit values of symmetry index. The results of the evaluation of changing asymmetry degree for some simple networks at their scaling are given. The general approach to the evaluation of extra topological value of joint means of communication at the stage of asymmetric network topological synthesis is suggested as well.

Keywords: communication network, topological network value, topological network synthesis.