УДК 006.91

О.А. Боцюра[1], Ю.Г. Жарко[2], И.П. Захаров[1]

[1] *Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*
[2] *ГП «Харьковский региональный научно-производственный центр стандартизации, метрологии и сертификации», Харьков*

ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ МАКСИМАЛЬНОГО НАБЛЮДАЕМОГО ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА ИСПЫТАНИЙ

Рассмотрена теория оценивания неопределенности измерений максимального значения ограниченного ряда наблюдений. Исследованы оценки неопределенности, полученные через формулу Бесселя и через размах выборки. Проводится сравнение эффективности этих оценок. Разработана методика оценивания неопределенности измерений при испытании автотранспортного средства.

Ключевые слова: *функция распределения, плотность вероятности, неопределенность измерений, эффективные оценки**,** автотранспортное средство.*

Введение

При проведении испытаний продукции в ряде случаев в качестве измеренного значения берется максимальное из полученных при испытаниях значений ограниченного ряда наблюдений измеряемой величины. Примером может служить методика определения уровня радиоэлектрических помех, вызываемых системами зажигания автотранспортных средств [1].

В работе [2] показано, что закон распределения максимального члена ряда наблюдений существенно отличается от закона распределения самих наблюдений и является асимметричным. При этом оценивание неопределенности измерений, в соответствии с рекомендациями [3], производилось в работе [2] на основе аппроксимации асимметричной плотности вероятности экспоненциальным распределением с применением принципа максимума энтропии для нахождения его параметров. В этом случае не удавалось получить оценку стандартной неопределенности максимального значения исходя из экспериментальных данных с учетом количества проведенных наблюдений.

Целью статьи является рассмотрение теории и разработка процедуры оценивания неопределенности измерений максимального значения ограниченного ряда наблюдений параметра испытаний.

1. Законы распределения максимального значения ряда наблюдений и оценки их параметров

В [4] приведена формула для функции распределения членов упорядоченной выборки наблюдений:

$$G(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \times \int_0^{F(x)} y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy, \quad (1)$$

где n − число элементов выборки, k − номер исследуемого члена выборки, $F(x)$ − функция распределения результатов наблюдений, из которых формируется выборка. Из выражения (1) можно получить выражение для распределения максимального члена выборки. Для этого принимаем $k = n$, тогда из (1) получаем

$$G_{max}(x) = \left[F(x)\right]^n. \quad (2)$$

Поскольку закон распределения членов ряда испытаний неизвестен, принимаем гипотезу о их равномерном распределении.

Функция равномерного внутри границ [a; b] распределения имеет вид (рис. 1, n = 1):

$$F(x) = (x-a)/(b-a), \quad a \le x \le b. \quad (3)$$

Подставляя (3) в выражение (2), получаем:

$$G_{max}(x) = \left((x-a)/(b-a)\right)^n. \quad (4)$$

Определим плотность вероятности по следующей формуле:

$$g_{max}(x) = \frac{dG_{max}(x)}{dx} = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}. \quad (5)$$

Графическое изображение зависимостей (4) и (5) для n = 2, 3, 4, 5 приведены на рис. 1 и 2.

По определению математического ожидания,

$$M(x_{max}) = \int_a^b x\frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}dx = a - \frac{n(b-a)}{n+1}. \quad (6)$$

По определению дисперсии

$$D(x_{max}) = \int_a^b \left(x - M(x_{max})\right)^2 \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}dx = \left(n\Big/\left((n+1)^2(n+2)\right)\right)\cdot(b-a)^2. \quad (7)$$

Поскольку для равномерного закона распределения дисперсия $D(x)$ равна

$$D(x) = (b-a)^2/12, \quad (8)$$

то получаем дисперсию x_{max} в виде:

$$D\left(x_{max}\right)=\frac{12n}{\left(n+1\right)^{2}\left(n+2\right)}D(x)\,. \qquad (9)$$

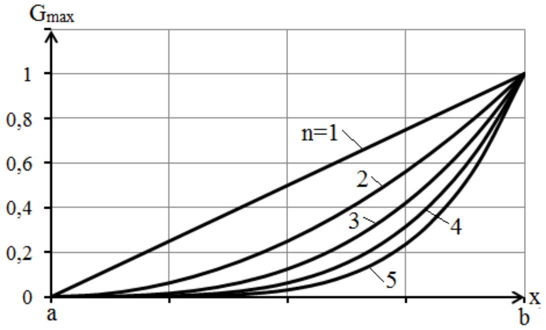

Рис. 1. Графическое изображение зависимости $G_{max}\left(x\right)$ для разных n

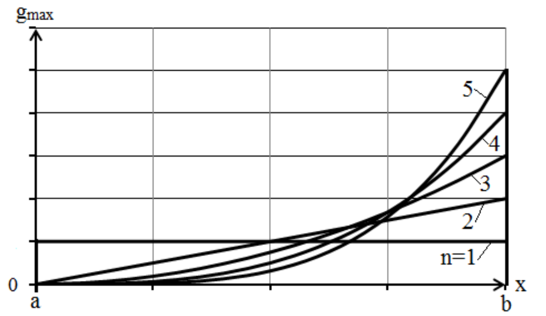

Рис. 2. Графическое изображение зависимости $g_{max}\left(x\right)$ для разных n

Отсюда среднее квадратическое отклонение (СКО) x_{max} будет равно:

$$\sigma\left(x_{max}\right)=\sqrt{\frac{12n}{\left(n+1\right)^{2}\left(n+2\right)}}\sigma(x)\,, \qquad (10)$$

где $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$. Тогда оценку СКО x_{max} можно определить по формуле:

$$S\left(x_{max}\right)=\sqrt{\frac{12n}{\left(n+1\right)^{2}\left(n+2\right)}}S(x)=\frac{S(x)}{\alpha}. \qquad (11)$$

Эта оценка будет являться стандартной неопределенностью x_{max}, найденной статистическим методом (по типу А). Значения коэффициента α для разных n приведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость коэффициента α в формуле (11) от n

n	α	n	α	n	α
2	1,224745	5	2,04939	8	2,904738
3	1,490712	6	2,333333	9	3,191424
4	1,767767	7	2,618615	10	3,478505

Анализ результатов, приведенных в табл. 1 показывает, что эта зависимость − линейная и хорошо аппроксимируется формулой:

$$\alpha=0,2827\cdot n+0,6439\,. \qquad (12)$$

2. Исследование эффективности оценок стандартной неопределенности результата измерения

Следует отметить, что оценку СКО S(x) по результатам испытаний x_i можно получить разными способами. В простейшем случае можно воспользоваться известной формулой Бесселя:

$$S\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\,, \qquad (13).$$

в которой $\overline{x}$ – среднее арифметическое x_i.

Такая оценка считается эффективной для нормального закона распределения.

В этом случае оценка стандартной неопределенности по типу А x_{max} будет равна:

$$u_{A1}\left(x_{max}\right)=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\,. \qquad (14)$$

В соответствии с методом Ллойда по способу наименьших квадратов, А. Сарханом и Б. Гринбергом найдена оптимальные линейные несмещенные оценки для равномерной модели распределения [6]:

$$(b-a)^*=\frac{n+1}{n-1}(x_{max}-x_{min})\,, \qquad (15)$$

которые представляют собой функции только экстремальных x_{max} и x_{min} значений результатов испытвний. Тогда

$$u_{A2}\left(x_{max}\right)=\sqrt{\frac{n}{\left(n+2\right)}}\frac{\left(x_{max}-x_{min}\right)}{\left(n-1\right)}= \\ =\left(x_{max}-x_{min}\right)/\beta. \qquad (16)$$

Зависимость коэффициента β от n приведена в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость коэффициента β в формуле (15) от n

n	β	n	β	n	β
2	1,414214	5	4,732864	8	7,826238
3	2,581989	6	5,773503	9	8,844333
4	3,674235	7	6,803361	10	9,859006

Анализ результатов, приведенных в табл. 2, показывает, что эта зависимость − линейная и хорошо аппроксимируется формулой:

$$\beta=1,049\cdot n-0,5708\,. \qquad (17)$$

Поскольку распределение x_{max} отлично как от равномерного, так и от нормального, необходимо провести сравнение эффективности оценок $u\left(x_{max}\right)$ для разных n. Для этого воспользуемся методом Монте-Карло (ММК). Алгоритм сравнения эффективности оценок с помощью ММК заключается в выполнении следующих шагов:

1. Формирование массива случайных чисел, содержащего $N=10^5–10^6$ выборок объемом n каждая, распределенных по равномерному закону.

2. Оценка $u_A(x_{max})$ каждой выборки массива по формулам (14) и (16).

Образование массивов $u_{A1}(x_{max})$, $u_{A2}(x_{max})$ объемами N.

3. Вычисление дисперсий оценок $u_{A1}(x_{max})$ и $u_{A2}(x_{max})$ по полученным массивам и определение их отношения γ.

Результаты отношения дисперсий β оценок стандартных неопределенностей (14) и (16) для разных n приведены в табл. 3.

Таблица 3

Зависимость отношений дисперсий γ оценок СКО (13) и (15) от n

n	γ	n	γ	n	γ
2	0,667	5	1,014	8	1,288
3	0,706	6	1,121	9	1,365
4	0,935	7	1,179	10	1,462

Анализ табл. 3 показывает, что для $n \le 4$ эффективной оценкой стандартной неопределенности типа А является формула (14), а для $n \ge 5$ − (16).

3. Процедура оценивания неопределенности результатов измерений при испытании автотранспортного средства

На основе полученных выше результатов разработана процедура оценивания неопределенности измерения при испытании автотранспортного средства, в методике которого заложено определение максимального значения ряда наблюдений. При ее реализации выполняются такие операции:

1) составление модельного уравнения:

$$Y = \max[X_1, X_2, X_3, ..., X_n], \qquad (18)$$

где Y – результат измерения; $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ – результаты n испытаний;

2) оценивание входных величии производится по результатам прямых однократных измерений соответствующим СИТ, при этом получают $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$;

3) оценку результата измерения находят по формуле

$$y = \max[x_1, x_2, x_3, ..., x_n];$$

4) стандартные неопределенности входных величин оценивают по типу А и по типу В:

- стандартную неопределенность типа А оценивают по формуле:

$$u_A(x_{max}) = \begin{cases} u_{A1}(x_{max}), & \text{для } n \le 4; \\ u_{A2}(x_{max}), & \text{для } n \ge 5; \end{cases}$$

- стандартную неопределенность типа В оценивают по формуле:

$$u_B(x_{max}) = \begin{cases} U_{СИТ}/k_{СИТ} & \text{для калиброванного СИТ;} \\ \theta/\sqrt{3} & \text{для поверенного СИТ,} \end{cases}$$

где $U_{СИТ}$ и $k_{СИТ}$ − соответственно расширенная неопределенность и коэффициент охвата, взятые из сертификата о калибровке СИТ; θ − предел допускаемой абсолютной погрешности поверенного СИТ, вычисленный через его класс точности [6].

5) вычисление суммарной стандартной неопределенности измеряемой величины осуществляется по формуле:

$$u_c(x_{max}) = \sqrt{u_A^2(x_{max}) + u_B^2(x_{max})}$$

6) вычисление расширенной неопределенности измеряемой величины осуществляется по формуле:

$$U = ku_c(x_{max}),$$

где k – коэффициент охвата для вероятности 0,95.

Выводы

1. Рассмотрена теория оценивания неопределенности измерений максимального значения ограниченного ряда наблюдений, приведены оценки стандартной неопределенности типа А через формулу Бесселя и через размах выборки.

2. В результате моделирования методом Монте-Карло исследована эффективность полученных оценок стандартной неопределенности типа А.

3. Приведена процедура оценивания неопределенности измерений при испытании автотранспортного средства, основанная на ранее полученных оценках стандартной неопределенности типа А.

Список литературы

1. ДСТУ UN ECE R 10-01:2002. Єдині технічні приписи щодо офіційного затвердження дорожніх транспортних засобів стосовно заглушення радіоелектричних завад. – Замість ГОСТ 17822-91; увед. 2004.

2. Оценивание неопределенности измерений при определении уровня радиоэлектрических помех, вызываемых системами зажигания автотранспортных средств / Ю.Г. Жарко, И.П. Захаров, Е.Н. Слипченко, Е.П. Сорока // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2009. – Вип. 5 (79). – С. 92-95.

3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneva, First Edition. – 1995 – 101 p.

4. Дунин-Барковский И.В. Теория вероятности и математическая статистика в технике (общая часть) / И.В. Дунин-Барковский, Н.В. Смирнов. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1955. − 557 с.

5. Введение в теорию порядковых статистик / Под ред. А.Я. Боярского. – М.: Статистика, 1970. − 416 с.

6. Захаров И.П. Неопределенность измерений для чайников и … начальников / И.П. Захаров / СПб.: Политехника-Сервис, 2014. − 52 с.

Поступила в редколлегию 19.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ МАКСИМАЛЬНОГО СПОСТЕРЕЖЕНОГО ЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРА ВИПРОБУВАНЬ

О.А. Боцюра, Ю.Г. Жарко, І.П. Захаров

Розглянуто теорію оцінювання невизначеності вимірювань максимального значення обмеженого ряду спостережень. Досліджено оцінки невизначеності, які отримано через формулу Беселя та через розмах вибірки. Проводиться порівняння ефективності цих оцінок. Розроблено методику оцінювання невизначеності вимірювань під час при випробувань автотранспортного засобу.

Ключові слова: *функція розподілу, щільність ймовірності, невизначеність вимірювань, ефективні оцінки, автотранспортний засіб*

MEASUREMENT UNCERTAINTY EVALUATION OF THE MAXIMUM OBSERVED VALUE OF THE TEST PARAMETER

O.A. Botsiura, Yu.G.Zharko, I.P. Zakharov

The theory of measurement uncertainty evaluation of the maximum limited number of observations is considered. Uncertainty estimates obtained through the formula of Bessel and the ranges of sample are studied. Comparison of the effectiveness of these estimates is conducted. The methodic of estimation of measurement uncertainty due to testing vehicle developed.

Keywords: *distribution function, probability density, measurement uncertainty, effective estimates, vehicle.*