

А.А. Данилов<sup>1</sup>, И.П. Захаров<sup>2</sup><sup>1</sup> ФБУ «Пензенский центр стандартизации, метрологии, сертификации», Пенза, Россия<sup>2</sup> Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

## ЕЩЕ РАЗ О ДОСТОВЕРНОСТИ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Проводится сравнение точности оценок характеристик неопределенности и погрешности измерений. В качестве референтного метода оценивания выступает метод Монте-Карло. Полученные результаты иллюстрируются простым примером.

**Ключевые слова:** характеристики погрешности, неопределенность измерений, коэффициент охвата.

### Введение

Руководство по выражению неопределенности измерений (GUM) [1] было разработано для обеспечения единообразного подхода к оцениванию точности измерений и используется в метрологической практике более 20 лет. О недостатках базового алгоритма GUM было написано много статей не только авторами настоящей публикации [2, 3], но и самими его создателями [4]. Метод Монте-Карло, описанный в [4], устраняет многие недостатки базового алгоритма, однако не снимает необходимость в ревизии GUM, проводимой в настоящее время BIPM с целью обеспечения правильного баланса между достигаемой точностью оценок и простотой использования для среднего пользователя.

Следует отметить, что на постсоветском пространстве в 70-х годах прошлого века была разработана и до сих пор применяется теория погрешностей [5]. Несмотря на ее известные недостатки, она вполне устраивает широкий круг метрологов-практиков, что ставит вопрос о возможности использования ее отдельных положений для оценивания неопределенности измерений.

Целью статьи является сравнение точности оценок характеристик неопределенности и погрешностей измерений.

### 1. Пример расчета характеристик погрешности и неопределенности измерений

Рассмотрим для наглядности пример, приведенный в брошюре [6]. Измерительная задача: определение скорости  $V$  транспортного средства, проходящего расстояние  $L$  за время  $T$  по формуле:

$$V = L/T.$$

Путь, проходимый транспортным средством  $L=100$  м известен априори.

Время прохождения этого отрезка пути измерялось 3 раза ( $n=3$ ) секундомером, при этом были получены следующие результаты:  $t_1 = 9,9$  с;  $t_2 = 10,0$  с;

$t_3 = 9,8$  с. Среднее значение этих измерений равно:  $\bar{t} = 9,9$  с. Тогда скорость транспортного средства будет равна:

$$v = 1/\bar{t} = 100 \text{ м}/9,9 \text{ с} = 10,101 \text{ м/с}. \quad (1)$$

Известно также, что предел допускаемой погрешности секундомера составляет  $\theta_t = 0,1$  с, а предел допускаемой погрешности задания  $L$  равен  $\theta_L = 1$  м.

#### 1.1. Расчет расширенной неопределенности измерения скорости

Стандартная неопределенность типа А оценки времени прохождения отрезка пути  $L$  транспортным средством будет равна:

$$u_A(\bar{t}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0,0577 \text{ с}. \quad (2)$$

Стандартная неопределенность типа В оценки времени прохождения отрезка пути  $L$  транспортным средством будет вычисляться исходя из предела допускаемой погрешности секундомера  $\theta_t = 0,1$  с, в предположении равномерного распределения погрешности на интервале  $\pm \theta_t$ :

$$u_B(t) = \theta_t / \sqrt{3} = 0,0577 \text{ с}. \quad (3)$$

Стандартная неопределенность типа В оценки отрезка пути  $L$  транспортным средством будет вычисляться исходя из предела допускаемой погрешности задания  $L$   $\theta_L = 1$  м, в предположении равномерного распределения погрешности на интервале  $\pm \theta_L$ :

$$u_B(L) = \theta_L / \sqrt{3} = 0,577 \text{ м}. \quad (4)$$

Коэффициент чувствительности неопределенности измерения скорости транспортного средства к неопределенности задания пройденного пути равен:

$$c_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{T} \Big|_{t=9,9 \text{ с}} = 0,101 \text{ с}^{-1}; \quad (5)$$

Коэффициент чувствительности неопределенности измерения скорости транспортного средства к неопределенности измерения времени равен:

$$c_t = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{L}{T^2} \Big|_{L=100 \text{ м}, t=9,9 \text{ с}} = -1,02 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Следовательно, вклад неопределенности задания пути в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_1(v) = c_1 u_B(l) = 0,0583 \text{ м/с}; \quad (7)$$

вклад неопределенности измерения времени типа А в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_{tA}(v) = c_t u_A(\bar{t}) = -0,0589 \text{ м/с}; \quad (8)$$

вклад неопределенности измерения времени типа В в неопределенность измерения скорости равен:

$$u_{tB}(v) = c_t u_B(t) = -0,0589 \text{ м/с}. \quad (9)$$

Таким образом, суммарная стандартная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$u_c(v) = \sqrt{[c_1 u_B(l)]^2 + [c_t u_A(\bar{t})]^2 + [c_t u_B(t)]^2} = 0,1017 \text{ м/с}. \quad (10)$$

Расширенная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет вычисляться как

$$U(v) = k u_c(v), \quad (11)$$

где  $k$  – коэффициент охвата, который вычисляется как коэффициент Стьюдента для уровня доверия 0,95 и эффективного числа степеней  $v_{\text{eff}}$ .

Эффективное число степеней свободы при измерении скорости транспортного средства определяется формулой Велча-Саттерсвейта:

$$v_{\text{eff}} = (n - 1) \left[ u_c(v) / u_{tA}(v) \right]^4 = 17,8. \quad (12)$$

Тогда можно вычислить коэффициент охвата:

$$k = t_{0,95}(v_{\text{eff}}) = 2,11, \quad (13)$$

а расширенная неопределенность измерения скорости транспортного средства будет равна:

$$U(v) = 2,11 \cdot 0,1017 = 0,2145 \text{ м/с}.$$

### 1.2. Расчет доверительных границ суммарной погрешности измерения скорости

Этот расчет будем осуществлять в соответствии с МИ 2083-90 [7].

Выражение для СКО случайной погрешности измерения времени аналогично выражению (2):

$$S(\bar{t}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0,0577 \text{ с}. \quad (14)$$

Выражение для СКО неисключенной систематической погрешности (НСП) измерения времени аналогично выражению (3):

$$S(\theta_t) = \theta_t / \sqrt{3} = 0,0577 \text{ с}. \quad (15)$$

Выражение для СКО НСП задания пути аналогично выражению (4):

$$S(\theta_1) = \theta_1 / \sqrt{3} = 0,577 \text{ с}. \quad (16)$$

Коэффициент влияния погрешности задания пройденного пути на погрешность измерения скорости транспортного средства вычисляется по формуле, аналогичной (5):

$$w_1 = \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{1}{T} \Big|_{t=9,9 \text{ с}} = 0,101 \text{ с}^{-1}; \quad (17)$$

Коэффициент влияния погрешности измерения времени на погрешность измерения скорости транспортного средства вычисляется по формуле, аналогичной (6):

$$w_t = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{L}{T^2} \Big|_{l=100 \text{ м}, t=9,9 \text{ с}} = -1,02 \text{ м/с}^2. \quad (18)$$

Формула для доверительных границ НСП измерения скорости имеет вид:

$$\theta_{0,95}(v) = 1,1 \sqrt{[w_1 \theta_1]^2 + [w_t \theta_t]^2} = 0,144 \text{ м/с}. \quad (19)$$

Доверительные границы случайной погрешности измерения скорости будут равны:

$$\varepsilon_{0,95}(v) = t_{0,95}(n-1) w_t S(\bar{t}) = 0,253 \text{ м/с}, \quad (20)$$

где  $t_{0,95}(n-1)$  – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы  $n-1=2$ ,  $t_{0,95}(2) = 4,3$ .

Доверительные границы измерения скорости вычисляются по формуле:

$$\Delta_p = k_{\Theta/S} (\varepsilon + \Theta) = 0,286 \text{ м/с}, \quad (21)$$

где  $k_{\Theta/S} = 0,72$  – коэффициент, взятый из таблицы, приведенной в [7] для соотношения

$$\theta_{0,95}(V) / S(V) = \theta_{0,95}(V) / [w_t S(\bar{t})] = 2,43.$$

Следует отметить, что результат, полученный в (21) можно получить (с незначительным отличием), используя выражения (А.13), (А.14) из стандарта ГОСТ 8.381-2009 [8].

$$\Delta_p = K_{\Sigma} S_{\Sigma} = 0,283 \text{ м/с}, \quad (22)$$

где  $S_{\Sigma}$  – СКО суммарной погрешности измерения скорости:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S^2(V) + S_0^2(V)} = 0,0956 \text{ м/с}, \quad (23)$$

причем  $S_0(V)$  – СКО НСП измерения скорости:

$$S_0(V) = \frac{\theta_{0,95}(v)}{1,1\sqrt{3}} = \sqrt{\left[ w_1 \frac{\theta_1}{\sqrt{3}} \right]^2 + \left[ w_t \frac{\theta_t}{\sqrt{3}} \right]^2} = 0,0753 \text{ м/с}; \quad (24)$$

$$K_{\Sigma} = \frac{\varepsilon_{0,95}(v) + \theta_{0,95}(v)}{|w_t S(\bar{t})| + S_0(v)} = 2,96. \quad (25)$$

### 1.3. Сравнение полученных результатов

Для определения достоверности результатов, полученных в пп. 1.1 и 1.2 было проведено оценивание расширенной неопределенности измерений с помощью метода Монте-Карло (ММК) [4]. Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты сравнения оценок расширенной неопределенности

GUM	МИ 2083-90	ГОСТ 8.381-09	ММК
0,2145 м/с	0,286 м/с	0,283 м/с	0,285 м/с

Сравнение полученных результатов показывает, что расширенная неопределенность, оцененная по методике GUM в 1,33 раза меньше, чем с помо-

щью ММК. Результаты же полученные через доверительные границы погрешности по методикам МИ 2083-90 и ГОСТ 8.381-09 практически совпадают с результатами, полученными с помощью ММК (относительная погрешность несовпадения 0,35 % и -0,7 % соответственно).

## 2. Рассмотрение общего случая

Рассмотренный в п. 2 пример показывает, что формулы для оценивания стандартной суммарной неопределенности измерений по методике GUM (2 – 10) полностью совпадают с формулами для расчета СКО суммарной погрешности измерения скорости (14 – 18, 23, 24). Отличие в расчетах расширенной неопределенности и доверительных границ погрешности заключается в расчете коэффициента пропорциональности. В методике GUM ему соответствует коэффициент охвата  $k$ , вычисляемый по формуле (13) а в методике ГОСТ 8.381-2009 [8] – коэффициент  $K_{\Sigma}$ , рассчитываемый по формуле (25).

В работе [2] было проведено сравнение результатов, полученных по этим формулам с результатами моделирования с помощью ММК. Было показано, что погрешности использования формул (13) и (25) возрастают с ростом  $u$  вклада неопределенности типа А, уменьшением числа его степеней свободы, а также с отклонением отношения вкладов неопределенности типа В от 1. Показано, что в зависимости от соотношения перечисленных параметров, погрешность аппроксимации формулой (13) колеблется от -25 до 12 %, а погрешность аппроксимации формулой (25) – от -5 до 20 %.

Таким образом, применение формулы (25) для оценивания расширенной неопределенности не всегда дает такой очевидный выигрыш в достоверности, как это показано в примере.

В работе [2] приводится более достоверная формула для оценивания коэффициента охвата через характеристики погрешности:

$$k = \sqrt{\frac{[t_{0,95}S(\bar{x})]^2 + \theta_{0,95}^2}{S^2(\bar{x}) + S_{\theta}^2}}, \quad (26)$$

применение которой во всех указанных ситуациях дает относительное отклонение от результатов, полученных с помощью ММК не более чем на  $\pm 4,5$  %.

## Выводы

1. Внедрение концепции неопределенности измерений как продукта процесса международной стандартизации оценивания качества измерений должно обеспечивать получение не только единообразных, но и максимально достоверных оценок неопределенности.

2. Достоверная оценка неопределенности не обязательно должна быть наименьшей: она должна наименее отличаться от референтной оценки, полученной методом Монте-Карло.

3. Выражение для коэффициента охвата, полученное из теории погрешности в ряде случаев дает более достоверные оценки по сравнению с формулой, приведенной в GUM, но не обеспечивает существенно большей достоверности для всех возможных ситуаций.

4. Более достоверную оценку коэффициента охвата дает формула (26), предложенная в работе [2].

## Список литературы

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneva, First Edition. – 1993 – 101 p.*
2. Захаров И.П. Исследование и повышение достоверности интервальных оценок точности прямых многократных измерений / И.П. Захаров // *АСУ и приборы автоматизации. – 2005. – Вып. 132. – С. 106-109.*
3. Захаров И.П. Оценивание неопределенности измерений: 10 лет спустя / И.П. Захаров // *Системы обработки информации. – X.: ХУПС, 2013. – Вып. 3 (110). – С. 2-7.*
4. *JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.*
5. Рабинович С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.
6. Захаров И.П. Неопределенность измерений для чайников и ... начальников. Уч. пос., 2-е изд. перераб. и дополн. / И.П. Захаров. – СПб.: Политехника-Сервис, 2014 – 52 с.
7. МИ 2083-90. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей.
8. ГОСТ 8.381-2009. Государственная система обеспечения единства измерений. Эталоны. Способы выражения точности.

Поступила в редколлегию 19.12.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Ю.П. Мачехин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## ЩЕ РАЗ ЩОДО ДОСТОВІРНОСТІ ОЦІНОК ХАРАКТЕРИСТИК НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ

О.О. Данілов, І.П. Захаров

*Проводиться порівняння точності оцінок характеристик невизначеності та похибки вимірювань. В якості референтного метода оцінювання виступає метод Монте-Карло. Отримані результати ілюструються простим прикладом.*

**Ключові слова:** характеристики похибки, невизначеність вимірювань, коефіцієнт покриття.

## ONCE AGAIN ABOUT THE RELIABILITY OF THE ESTIMATES UNCERTAINTIES AND ERRORS OF MEASUREMENT

A.A. Danilov, I.P. Zakharov

*A comparison of the accuracy of estimates of the characteristics of uncertainties and errors of measurement was realized. The Monte Carlo simulation was taken as a reference method of evaluation. The obtained results are illustrated by the simple example.*

**Keywords:** characteristics of error, measurement uncertainty, coverage factor.