

ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

к.ф.-м.н. С.В. Гадецкая
(представил д.т.н., проф. И.Д. Горбенко)

Приведено доказательство существования окружности девяти точек для тупоугольного и прямоугольного треугольников.

При изготовлении крупногабаритных машиностроительных конструкций сложной конфигурации широко используется плазменная технология. Она применяется, например, при построении в натуральную величину теоретического чертежа судна, изготовлении выкроек частей корпусов летательных аппаратов, имеющих оживальную форму и т.д. Суть этой технологии состоит в том, что с помощью специальных геометрических построений на лист конструктивного материала чертеж переносится в натуральную величину [1].

Процесс переноса линий, выполненных в масштабе на лист материала с преобразованием их в натуральную величину, получил название разметки. Это одна из важнейших технологических операций на этапе подготовки производства [2,3] и одна из немногих, где широко применяются классические геометрические построения циркулем и линейкой, даже если их физическая реализация осуществляется лазером, управление которым реализует компьютер. В некоторых задачах разметки плоского листа при плазменной проектировании возникают проблемы, приводящие к изучению так называемой окружности девяти точек.

1. Прямая Эйлера. Начнем с рассмотрения достаточно известных фактов из геометрии треугольника.

Треугольник, полученный соединением середин сторон данного треугольника, называется *серединным*. На рис.1 треугольник $A_1B_1C_1$ является серединным треугольником треугольника ABC , где A_1, B_1, C_1 – соответственно середины сторон BC, AC, AB .

Исследование указанных двух треугольников приводит к целому ряду результатов, устанавливающих тесную взаимосвязь между их элементами. Укажем лишь некоторые из них, необходимые для дальнейшего рассмотрения. Введем обозначения: точка R – центроид ΔABC (точка пересечения медиан); точка H – ортоцентр ΔABC (точка пересечения высот). Проведем серединные перпендикуляры A_1O и B_1O треугольника ABC . Тогда *точка O их пересечения является центром описанной окружности ΔABC и ортоцентром $\Delta A_1B_1C_1$.*

Далее, так как $AB_1A_1C_1$ - параллелограмм (по построению), то его диагонали AA_1 и B_1C_1 точкой пересечения P делятся пополам, откуда получаем, что медианы $\Delta A_1B_1C_1$ лежат на медианах ΔABC , следовательно, точка R является центроидом и $\Delta A_1B_1C_1$.

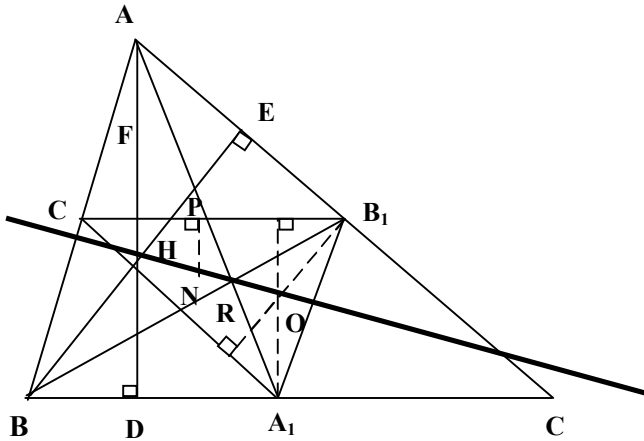


Рис. 1

Поскольку, в силу свойств средней линии треугольника, *треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия 2*, отношение длин любых двух соответствующих отрезков этих треугольников будет равно 2:1, в частности, $AH=2A_1O$ и $AR=2A_1R$.

Используя параллельность AD и A_1O , приходим к *подобию треугольников AHR и A_1OR с коэффициентом подобия 2*, откуда следует равенство углов ARH и A_1RO (что означает принадлежность точек H, R, O одной прямой); при этом $HR = 2RO$ (что указывает на особенность расположения точки R между точками H и O). Подводя итог проведенным рассуждениям, приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Ортоцентр H , центроид R и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой (называемой прямой Эйлера). Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2:1.*

2. Окружность девяти точек. Продолжим изучение рис.1. Так как точка O является ортоцентром $\Delta A_1B_1C_1$, а точка R - его центроидом, то прямая OR - это прямая Эйлера $\Delta A_1B_1C_1$. Проведем серединный перпендикуляр PN треугольника $A_1B_1C_1$, где N - точка пересечения его с прямой OR .

В силу утверждения предыдущего пункта центр описанной окружности $\Delta A_1B_1C_1$, принадлежащий PN , обязательно будет принадлежать к прямой Эйлера OR . Следовательно, точка N - точка описанной окружности $\Delta A_1B_1C_1$, причем ее радиус $r = NA_1 = NB_1 = NC_1$ в 2 раза меньше радиуса описанной окружности ΔABC (в силу подобия ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$). Так как $AH \parallel PN \parallel A_1O$ и отрезок AA_1 пересекает прямую PN в своей середине - точке P , то прямая PN равноудалена от прямых AH и A_1O . Это означает, что точка N является серединой отрезка HO .

Введем в рассмотрение точку F - середину отрезка AH . Тогда, по установленному ранее соотношению $AH = 2A_1O$, имеем $NA_1 = NF$, т.е. точки A_1 и F - диаметрально противоположны. Это означает, что точка F принадлежит описанной окружности $\Delta A_1B_1C_1$. Очевидно, это справедливо и для точек, являющихся серединами отрезков других высот ΔABC от вершин до ортоцентра H (эти точки также носят имя Эйлера).

Замечая теперь, что прямой угол A_1DF опирается на диаметр A_1F рассматриваемой окружности, делаем вывод о принадлежности этой окружности точки D , а также, по аналогии, оснований всех высот треугольника ABC .

Таким образом, доказано, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$, являющегося серединным по отношению к данному треугольнику ABC , проходит через его точки Эйлера и основания его высот. Другими словами, установлено существование окружности, проходящей через 9 специальных точек треугольника ABC . Сформулируем окончательный результат проведенного исследования.

Теорема 2. *Основания трех высот треугольника, середины трех его сторон и точки Эйлера лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек. Радиус этой окружности равен половине радиуса описанной окружности треугольника, а центр принадлежит прямой Эйлера и находится посередине между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.*

Подробные сведения об окружности девяти точек приведены в [4, с.53 - 77], [5, с.34 - 38], [6, с. 28 - 33, 145 - 147].

3. Частные случаи. При проведении всех рассуждений предыдущего пункта рассматривался остроугольный треугольник. Рассмотрение в литературе других случаев автором не найдено. Установим существование аналогичной окружности в случаях тупоугольного и прямоугольного треугольников.

В тупоугольном треугольнике ABC (рис. 2) отметим все девять точек.

Покажем, что они принадлежат одной окружности, перейдя для этого к рассмотрению остроугольного треугольника AHC .

Заметим, что вершина B тупого угла является ортоцентром ΔAHC . Меняются при переходе к рассмотрению треугольника AHC и роли де-

вяти точек треугольника ABC : точки D, E, K - основания треугольника

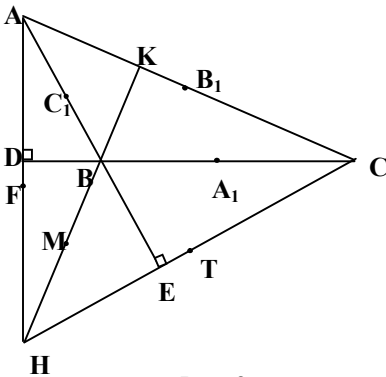


Рис. 2

этом ее диаметр равен радиусам описанных окружностей указанных треугольников.

В случае прямоугольного треугольника (рис. 3) рассмотрение девяти точек фактически сводится к пяти точкам B, A_1, K, O, C_1 (две точки Эйлера совпадают с серединами сторон - точками A_1 и C_1 , а третья точка Эйлера и основания двух высот сливаются с вершиной B прямого угла).

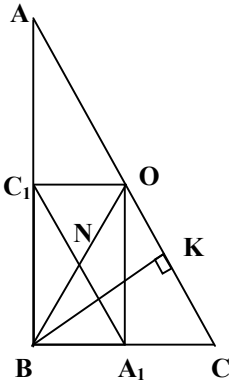


Рис. 3

Окружность, описанная около прямоугольника BA_1OC_1 , имеет центр в точке N пересечения его диагоналей и проходит через точку K как через вершину прямого угла, опирающегося на диагональ BO как на диаметр. Эта окружность является в данном случае искомой.

4. Задачи о замечательных точках.

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с окружностью девяти точек, а также с другими окружностями, проходящими через различные «замечательные» точки.

Задача 1. Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть L - точка пересечения биссектрис. Доказать, что середины отрезков $AL, BL, CL, A_1L, B_1L, C_1L, A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1$ лежат на одной окружности.

Решение. Покажем, что данную задачу можно решить, применяя теорему об окружности девяти точек к $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 4).

A_1NC , точки F, T, B_1 - середины его сторон, а точки M, C_1, A_1 - его точки Эйлера. Но тогда по доказанной теореме все эти девять точек лежат на одной окружности, что и требовалось доказать. Таким образом, теорема об окружности девяти точек доказана.

Замечание. Проведенные рассуждения приводят к справедливости известной теоремы Гамильтона.

Треугольники ABC, ABH, ACH, BSH (рис. 1), где H - ортоцентр треугольника ABC , имеют общую окружность девяти точек; при

Обозначим: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тогда для дуг, на которые опираются соответствующие им вписанные углы, имеем:

$$\cup BA_1 = \cup A_1C = \frac{\alpha}{2}, \cup CB_1 = \cup B_1A = \frac{\beta}{2}, \cup AC_1 = \cup C_1B = \frac{\gamma}{2}.$$

Обозначим через V точку пересечения отрезков A_1B_1 и CC_1 . Так как угол $\angle VB_1C_1$ равен углу $\angle A_1B_1C_1$, который опирается на дугу C_1A_1

величиной $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, а угол $\angle VC_1B_1$

равен углу $\angle CC_1B_1$, который опирается на дугу CB_1 величиной

$\frac{\beta}{2}$, то из $\triangle C_1VB_1$ имеем:

$$\begin{aligned} \angle C_1VB_1 &= \\ &= 180^\circ - \angle VB_1C_1 - \angle VC_1B_1 = \\ &= 180^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ, \end{aligned}$$

откуда следует, что C_1V – высота $\triangle A_1C_1B_1$, а точка T , являющаяся серединой отрезка C_1L , – точка Эйлера этого треугольника.

Далее, так как углы $\angle BB_1A_1$ и $\angle CB_1A_1$, опирающиеся на равные дуги BA_1 и A_1C , равны, то высота B_1L треугольника LB_1C является и его биссектрисой. Отсюда следует, что точка V является серединой отрезка CL , т.е. также одной из указанных в условии задачи девяти точек.

Аналогичные рассуждения можно провести для середин отрезков A_1L , B_1L , AL , BL .

Подводя итог, получаем, что середины отрезков AL , BL , CL – это основания высот $\triangle A_1B_1C_1$, середины отрезков A_1L , B_1L , C_1L – это точки Эйлера $\triangle A_1B_1C_1$, а середины отрезков A_1B_1 , A_1C_1 , B_1C_1 – это середины сторон $\triangle A_1B_1C_1$.

Это означает, в силу теоремы об окружности девяти точек, что середины всех указанных отрезков лежат на одной окружности.

Задача 2. Доказать, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник (рис. 5). Отметим на рисунке точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 – середины его сторон. Тогда четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник (по свойствам средней линии тре-

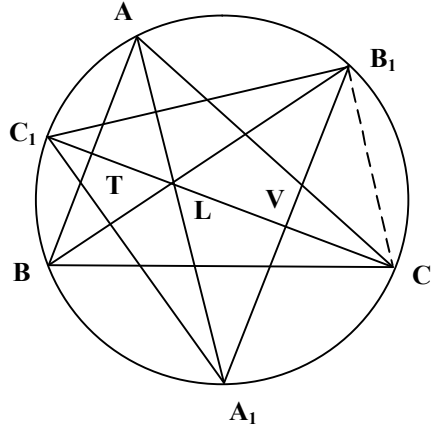


Рис. 4

угольника), а точка N пересечения его диагоналей – центр описанной около $A_1B_1C_1D_1$ окружности. Далее, по теореме Брахмагупты ([5], с.74 - 75), при выполнении условий задачи медиана HA_1 треугольника ABC и высота NK треугольника DCN лежат на одной прямой (в этом несложно убедиться непосредственно, если использовать равенство углов, отмеченных на рисунке). Но тогда указанная выше окружность проходит и через точку K как через вершину прямого угла, опирающегося на отрезок A_1C_1 как на диаметр. Аналогично доказывается принадлежность этой же окружности других трех оснований перпендикуляров, опущенных из точки N на стороны $ABCD$. Таким образом, существование окружности, проходящей через 8 указанных в задаче точек, установлено.

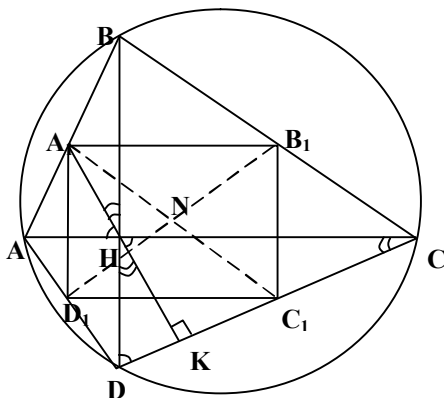


Рис. 5

выполнении условий задачи медиана HA_1 треугольника ABC и высота NK треугольника DCN лежат на одной прямой (в этом несложно убедиться непосредственно, если использовать равенство углов, отмеченных на рисунке). Но тогда указанная выше окружность проходит и через точку K как через вершину прямого угла, опирающегося на отрезок A_1C_1 как на диаметр. Аналогично доказывается при-

надлежность этой же окружности других трех оснований перпендикуляров, опущенных из точки N на стороны $ABCD$. Таким образом, существование окружности, проходящей через 8 указанных в задаче точек, установлено.

Вывод. Приведенные решения задач позволяют повысить качество разметки и улучшить аэродинамические характеристики поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Политехнический словарь / Под ред. акад. А.Ю. Ишлинского. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 656 с.
2. Шмыгин В.В. Графические методы расчетов в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1967. – 287 с.
3. Мотыко А.С., Островский И.Д. Развертки поверхностей листовых изделий. – М.: МАШГИЗ, 1961. – 160 с.
4. С.И. Зетель. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962. – 152 с.
5. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
6. Г.С.М. Кокстер, С.Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

Поступила 15.02.2002

ГАДЕЦКАЯ Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики и информационных технологий Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1986 году закончила Харьковский государственный университет. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, геометрия треугольника.