

## ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

к.ф.-м.н. С.В. Гадецкая  
(представил д.т.н., проф. И.Д. Горбенко)

*Приведено доказательство существования окружности девяти точек для тупоугольного и прямоугольного треугольников.*

При изготовлении крупногабаритных машиностроительных конструкций сложной конфигурации широко используется плазменная технология. Она применяется, например, при построении в натуральную величину теоретического чертежа судна, изготовлении выкроек частей корпусов летательных аппаратов, имеющих оживальную форму и т.д. Суть этой технологии состоит в том, что с помощью специальных геометрических построений на лист конструктивного материала чертеж переносится в натуральную величину [1].

Процесс переноса линий, выполненных в масштабе на лист материала с преобразованием их в натуральную величину, получил название разметки. Это одна из важнейших технологических операций на этапе подготовки производства [2,3] и одна из немногих, где широко применяются классические геометрические построения циркулем и линейкой, даже если их физическая реализация осуществляется лазером, управление которым реализует компьютер. В некоторых задачах разметки плоского листа при плазменной проектировании возникают проблемы, приводящие к изучению так называемой окружности девяти точек.

**1. Прямая Эйлера.** Начнем с рассмотрения достаточно известных фактов из геометрии треугольника.

Треугольник, полученный соединением середин сторон данного треугольника, называется *серединным*. На рис.1 треугольник  $A_1B_1C_1$  является серединным треугольником треугольника  $ABC$ , где  $A_1, B_1, C_1$  – соответственно середины сторон  $BC, AC, AB$ .

Исследование указанных двух треугольников приводит к целому ряду результатов, устанавливающих тесную взаимосвязь между их элементами. Укажем лишь некоторые из них, необходимые для дальнейшего рассмотрения. Введем обозначения: точка  $R$  – центроид  $\Delta ABC$  (точка пересечения медиан); точка  $H$  – ортоцентр  $\Delta ABC$  (точка пересечения высот). Проведем серединные перпендикуляры  $A_1O$  и  $B_1O$  треугольника  $ABC$ . Тогда *точка  $O$  их пересечения является центром описанной окружности  $\Delta ABC$  и ортоцентром  $\Delta A_1B_1C_1$ .*

Далее, так как  $AB_1A_1C_1$  - параллелограмм (по построению), то его диагонали  $AA_1$  и  $B_1C_1$  точкой пересечения  $P$  делятся пополам, откуда получаем, что медианы  $\Delta A_1B_1C_1$  лежат на медианах  $\Delta ABC$ , следовательно, точка  $R$  является центроидом и  $\Delta A_1B_1C_1$ .

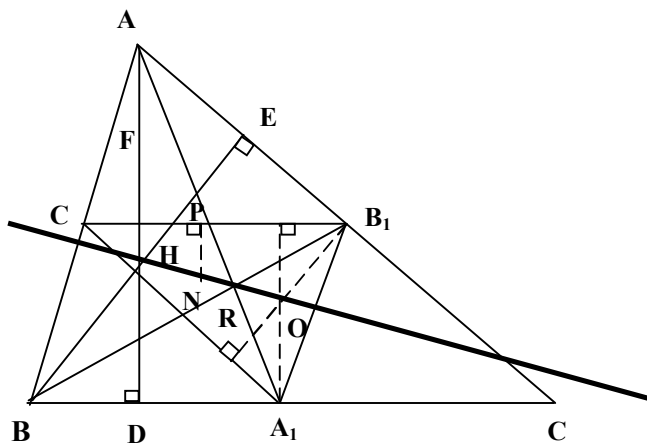


Рис. 1

Поскольку, в силу свойств средней линии треугольника, *треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны с коэффициентом подобия 2*, отношение длин любых двух соответствующих отрезков этих треугольников будет равно 2:1, в частности,  $AH=2A_1O$  и  $AR=2A_1R$ .

Используя параллельность  $AD$  и  $A_1O$ , приходим к подобию *треугольников  $AHR$  и  $A_1OR$  с коэффициентом подобия 2*, откуда следует равенство углов  $ARH$  и  $A_1RO$  (что означает принадлежность точек  $H, R, O$  одной прямой); при этом  $HR = 2RO$  (что указывает на особенность расположения точки  $R$  между точками  $H$  и  $O$ ). Подводя итог проведенным рассуждениям, приходим к справедливости следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Ортоцентр  $H$ , центроид  $R$  и центр описанной окружности  $O$  треугольника  $ABC$  лежат на одной прямой (называемой прямой Эйлера). Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2:1.*

**2. Окружность девяти точек.** Продолжим изучение рис.1. Так как точка  $O$  является ортоцентром  $\Delta A_1B_1C_1$ , а точка  $R$  - его центроидом, то прямая  $OR$  - это прямая Эйлера  $\Delta A_1B_1C_1$ . Проведем серединный перпендикуляр  $PN$  треугольника  $A_1B_1C_1$ , где  $N$  - точка пересечения его с прямой  $OR$ .

В силу утверждения предыдущего пункта центр описанной окружности  $\Delta A_1B_1C_1$ , принадлежащий  $PN$ , обязательно будет принадлежать к прямой Эйлера  $OR$ . Следовательно, точка  $N$  - точка описанной окружности  $\Delta A_1B_1C_1$ , причем ее радиус  $r = NA_1 = NB_1 = NC_1$  в 2 раза меньше радиуса описанной окружности  $\Delta ABC$  (в силу подобия  $\Delta ABC$  и  $\Delta A_1B_1C_1$ ). Так как  $AH \parallel PN \parallel A_1O$  и отрезок  $AA_1$  пересекает прямую  $PN$  в своей середине - точке  $P$ , то прямая  $PN$  равноудалена от прямых  $AH$  и  $A_1O$ . Это означает, что точка  $N$  является серединой отрезка  $HO$ .

Введем в рассмотрение точку  $F$  - середину отрезка  $AH$ . Тогда, по установленному ранее соотношению  $AH = 2A_1O$ , имеем  $NA_1 = NF$ , т.е. точки  $A_1$  и  $F$  - диаметрально противоположны. Это означает, что точка  $F$  принадлежит описанной окружности  $\Delta A_1B_1C_1$ . Очевидно, это справедливо и для точек, являющихся серединами отрезков других высот  $\Delta ABC$  от вершин до ортоцентра  $H$  (эти точки также носят имя Эйлера).

Замечая теперь, что прямой угол  $A_1DF$  опирается на диаметр  $A_1F$  рассматриваемой окружности, делаем вывод о принадлежности этой окружности точки  $D$ , а также, по аналогии, оснований всех высот треугольника  $ABC$ .

Таким образом, доказано, что описанная окружность треугольника  $A_1B_1C_1$ , являющегося серединным по отношению к данному треугольнику  $ABC$ , проходит через его точки Эйлера и основания его высот. Другими словами, установлено существование окружности, проходящей через 9 специальных точек треугольника  $ABC$ . Сформулируем окончательный результат проведенного исследования.

***Теорема 2.** Основания трех высот треугольника, середины трех его сторон и точки Эйлера лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек. Радиус этой окружности равен половине радиуса описанной окружности треугольника, а центр принадлежит прямой Эйлера и находится посередине между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.*

Подробные сведения об окружности девяти точек приведены в [4, с.53 - 77], [5, с.34 - 38], [6, с. 28 - 33, 145 - 147].

**3. Частные случаи.** При проведении всех рассуждений предыдущего пункта рассматривался остроугольный треугольник. Рассмотрение в литературе других случаев автором не найдено. Установим существование аналогичной окружности в случаях тупоугольного и прямоугольного треугольников.

В тупоугольном треугольнике  $ABC$  (рис. 2) отметим все девять точек.

Покажем, что они принадлежат одной окружности, перейдя для этого к рассмотрению остроугольного треугольника  $AHC$ .

Заметим, что вершина  $B$  тупого угла является ортоцентром  $\Delta AHC$ . Меняются при переходе к рассмотрению треугольника  $AHC$  и роли де-

вяти точек треугольника  $ABC$ : точки  $D, E, K$  - основания треугольника

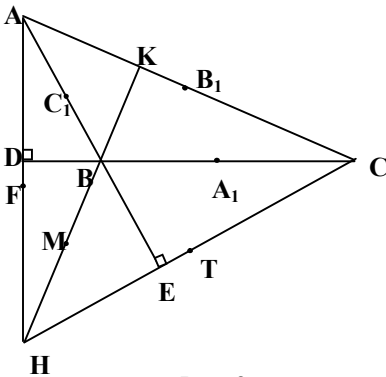


Рис. 2

$AHC$ , точки  $F, T, B_1$  - середины его сторон, а точки  $M, C_1, A_1$  - его точки Эйлера. Но тогда по доказанной теореме все эти девять точек лежат на одной окружности, что и требовалось доказать. Таким образом, теорема об окружности девяти точек доказана.

**Замечание.** Проведенные рассуждения приводят к справедливости известной теоремы Гамильтона.

Треугольники  $ABC, ABH, ACH, BSH$  (рис. 1), где  $H$  - ортоцентр треугольника  $ABC$ , имеют общую окружность девяти точек; при

этом ее диаметр равен радиусам описанных окружностей указанных треугольников.

В случае прямоугольного треугольника (рис. 3) рассмотрение девяти точек фактически сводится к пяти точкам  $B, A_1, K, O, C_1$  (две точки Эйлера совпадают с серединами сторон - точками  $A_1$  и  $C_1$ , а третья точка Эйлера и основания двух высот сливаются с вершиной  $B$  прямого угла).

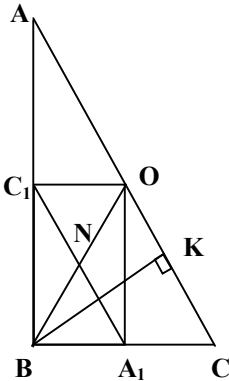


Рис. 3

Окружность, описанная около прямоугольника  $BA_1OC_1$ , имеет центр в точке  $N$  пересечения его диагоналей и проходит через точку  $K$  как через вершину прямого угла, опирающегося на диагональ  $BO$  как на диаметр. Эта окружность является в данном случае искомой.

#### 4. Задачи о замечательных точках.

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с окружностью девяти точек, а также с другими окружностями, проходящими через различные «замечательные» точки.

**Задача 1.** Биссектрисы внутренних углов треугольника  $ABC$  продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Пусть  $L$  - точка пересечения биссектрис. Доказать, что середины отрезков  $AL, BL, CL, A_1L, B_1L, C_1L, A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1$  лежат на одной окружности.

**Решение.** Покажем, что данную задачу можно решить, применяя теорему об окружности девяти точек к  $\Delta A_1B_1C_1$  (рис. 4).

Обозначим:  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ . Тогда для дуг, на которые опираются соответствующие им вписанные углы, имеем:

$$\cup BA_1 = \cup A_1C = \frac{\alpha}{2}, \cup CB_1 = \cup B_1A = \frac{\beta}{2}, \cup AC_1 = \cup C_1B = \frac{\gamma}{2}.$$

Обозначим через  $V$  точку пересечения отрезков  $A_1B_1$  и  $CC_1$ . Так как угол  $\angle VB_1C_1$  равен углу  $\angle A_1B_1C_1$ , который опирается на дугу  $C_1A_1$

величиной  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ , а угол  $\angle VC_1B_1$

равен углу  $\angle CC_1B_1$ , который опирается на дугу  $CB_1$  величиной

$\frac{\beta}{2}$ , то из  $\triangle C_1VB_1$  имеем:

$$\begin{aligned} \angle C_1VB_1 &= \\ &= 180^\circ - \angle VB_1C_1 - \angle VC_1B_1 = \\ &= 180^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $C_1V$  – высота  $\triangle A_1C_1B_1$ , а точка  $T$ , являющаяся серединой отрезка  $C_1L$ , – точка Эйлера этого треугольника.

Далее, так как углы  $\angle BB_1A_1$  и  $\angle CB_1A_1$ , опирающиеся на равные дуги  $BA_1$  и  $A_1C$ , равны, то высота  $B_1L$  треугольника  $LB_1C$  является и его биссектрисой. Отсюда следует, что точка  $V$  является серединой отрезка  $CL$ , т.е. также одной из указанных в условии задачи девяти точек.

Аналогичные рассуждения можно провести для середин отрезков  $A_1L$ ,  $B_1L$ ,  $AL$ ,  $BL$ .

Подводя итог, получаем, что середины отрезков  $AL$ ,  $BL$ ,  $CL$  – это основания высот  $\triangle A_1B_1C_1$ , середины отрезков  $A_1L$ ,  $B_1L$ ,  $C_1L$  – это точки Эйлера  $\triangle A_1B_1C_1$ , а середины отрезков  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$ ,  $B_1C_1$  – это середины сторон  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Это означает, в силу теоремы об окружности девяти точек, что середины всех указанных отрезков лежат на одной окружности.

**Задача 2.** Доказать, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

**Решение.** Пусть  $ABCD$  – данный четырехугольник (рис. 5). Отметим на рисунке точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  – середины его сторон. Тогда четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  – прямоугольник (по свойствам средней линии тре-

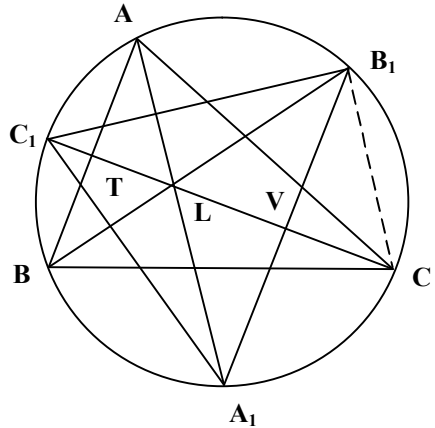


Рис. 4

угольника), а точка  $N$  пересечения его диагоналей – центр описанной около  $A_1B_1C_1D_1$  окружности. Далее, по теореме Брахмагупты ([5], с.74 - 75), при

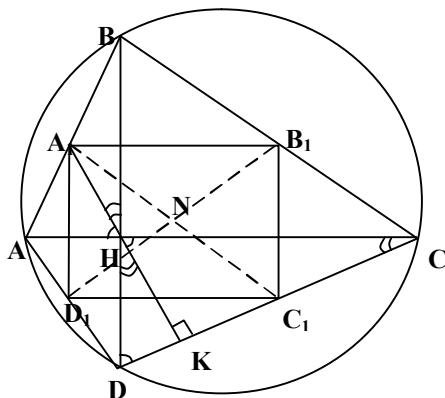


Рис. 5

выполнении условий задачи медиана  $HA_1$  треугольника  $ABC$  и высота  $NK$  треугольника  $ДСН$  лежат на одной прямой (в этом несложно убедиться непосредственно, если использовать равенство углов, отмеченных на рисунке). Но тогда указанная выше окружность проходит и через точку  $K$  как через вершину прямого угла, опирающегося на отрезок  $A_1C_1$  как на диаметр. Ана-

логично доказывается принадлежность этой же окружности других трех оснований перпендикуляров, опущенных из точки  $N$  на стороны  $ABCD$ . Таким образом, существование окружности, проходящей через 8 указанных в задаче точек, установлено.

**Вывод.** Приведенные решения задач позволяют повысить качество разметки и улучшить аэродинамические характеристики поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Политехнический словарь / Под ред. акад. А.Ю. Ишлинского. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 656 с.*
2. *Шмыгин В.В. Графические методы расчетов в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1967. – 287 с.*
3. *Мотыко А.С., Островский И.Д. Развертки поверхностей листовых изделий. – М.: МАШГИЗ, 1961. – 160 с.*
4. *С.И. Зетель. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962. – 152 с.*
5. *Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966. – 648 с.*
6. *Г.С.М. Кокстер, С.Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.*

Поступила 15.02.2002

**ГАДЕЦКАЯ Светлана Викторовна**, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики и информационных технологий Харьковского филиала Украинской академии банковского дела. В 1986 году закончила Харьковский государственный университет. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, геометрия треугольника.