

РЕШЕНИЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОСТАВА ЛЕГКОГО БЕТОНА

к.т.н. В.Ю. Дубницкий, к.т.н. В.Г. Наникашвили
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

В статье описано решение плохо обусловленной системы линейных уравнений, описывающей процесс определения состава легкого бетона. Вычислены допустимые ошибки определения переменных.

Постановка проблемы. В настоящее время отсутствует строго обоснованное решение задачи подбора состава легкого бетона. Известные методики [1, 7] являются в значительной мере эмпирическими, что приводит к неоправданному удорожанию конечного продукта и отсутствию единообразия в технических решениях.

В этих методиках не учитывается влияние погрешностей на конечный результат расчета и не рассмотрены способы определения их допустимых величин.

Анализ литературы. В [1] для определения составов легких бетонов рекомендовано применять следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{K}{\gamma_K} + \frac{\Pi}{\gamma_{\Pi}} + \frac{\text{Ц}}{\rho_{\text{Ц}}} + B = 1; \\ q\text{Ц} + K + \Pi = \gamma_{\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

где K , Π , Ц , B – искомые величины расхода крупного (K) и мелкого (Π) заполнителей на 1 м^3 бетонной смеси; Ц – расход цемента; B – воды; q – эмпирический коэффициент; γ_{δ} – объемная масса бетона. После необходимых преобразований, изложенных в указанном выше источнике, система (1) может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ ax_1 + bx_2 = g. \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе известные величины a , b , g больше нуля. Так, как по физическому смыслу задачи ее решение должно быть неотрицательным, то:

$$x_1 = \frac{g-b}{a-b}; \quad x_2 = \frac{a-g}{a-b} \quad (3)$$

или

$$x_1 = \frac{b-g}{b-a}; \quad x_2 = \frac{g-a}{b-a}. \quad (4)$$

Условие (3) будет выполнено, если $b < g < a$, условие (4) будет выполнено, если $a < g < b$. Очевидно, что если $b \rightarrow a$, то решение утрачивает физический смысл. Коэффициенты a , b и величину g определяют на основе экспериментальных данных, которым присуща естественная методическая и случайная погрешность. Поэтому вместо системы (2) следует рассмотреть систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ ax_1 + bx_2 = g + \Delta g. \end{cases} \quad (5)$$

Цель работы: решение системы (5) в аналитическом виде, применяя методы теории некорректных задач [2].

Решение системы (5). Пусть:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ g + \Delta g \end{pmatrix}.$$

Тогда вместо решения системы (4) следует искать решение системы

$$\left(\alpha E + A^T A \right) X = A^T Y, \quad (6)$$

где E – единичная матрица; α – параметр регуляризации, $\alpha \rightarrow 0$.

Выполнив необходимые преобразования, получим, что:

$$x_1 = \frac{1}{w} \left[a(\alpha g - b + g) + \alpha + b^2 + bg + 2 \right]; \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{1}{w} \left[a^2 + a(g - b) + \alpha(bg + 1) + bg + 2 \right]; \quad (8)$$

$$w = a^2(\alpha + 1) - 2ab + \alpha^2 + \alpha(b^2 + 2) + b^2. \quad (9)$$

В тех случаях, когда $|a - b| > 0$, расчеты выполняют по формулам (3) и (4), в тех случаях, когда определитель системы (2) близок к нулю, расчеты следует проводить по формулам (7) – (9). В этом случае говорят, что система (2) плохо обусловлена. Мерой обусловленности системы (2) примем N – число обусловленности матрицы A [3], которое определяют по формуле

$$N(A) = \frac{1}{n} \text{Sp} \left(A^T A \right) \cdot \left(A^T A \right)^{-1}. \quad (10)$$

В нашем случае получим, что:

$$N(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 + b^2 + 2)}{(a - b)^2}. \quad (11)$$

В [3] отмечено, что величина $N(A)$ имеет следующий вероятностный смысл. Примем, что неизвестные x_i и коэффициенты a_{ij} суть случайные величины, имеющие конечные среднеквадратические отклонения σ_{x_i} и $\sigma_{a_{ij}}$ соответственно. В свою очередь погрешности определения этих величин имеют средние квадратические отклонения $\sigma_{\Delta x_i}$ и $\sigma_{\Delta a_{ij}}$. Тогда

$$N(A) = \frac{\sigma_{\Delta x_i}}{\sigma_{x_i}} \bigg/ \frac{\sigma_{\Delta a_{ij}}}{\sigma_{a_{ij}}}. \quad (12)$$

Используя понятие эластичности [4] можно сказать, что $N(A)$ является эластичностью среднего квадратического ошибки переменной по среднему квадратическому ошибке коэффициентов.

В случае, когда $N(A)$ равно единице, следует независимость величины Δx_i от величины Δa_{ij} . Для определения предельно допустимых погрешностей в определении значений величин x_1, x_2 ($\Delta x_1, \Delta x_2$) соответственно, необходимо определить условие

$$\|\Delta X\| \leq \frac{\|\Delta Y\|}{(\det A)^2} \cdot \left(\sum_i^n \sum_j^n a_{ij}^2 / (n-1) \right)^{n-1}, \quad (13)$$

где символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма соответствующего вектора.

Отсюда получим, что

$$\|\Delta x\| \leq \frac{(\Delta g)^2}{(b-a)^2} (a^2 + b^2 + 2) \quad (14)$$

или

$$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \leq B \quad (15)$$

(B – правая часть неравенства (14)).

Из анализа условия (15) следует, что если $\Delta x_1 = \Delta x_2$, то

$$\Delta x \leq B / \sqrt{2} \leq 0,707 B. \quad (16)$$

Если же известно, что $\Delta x_1 / \Delta x_2 = K$, то:

$$\Delta x_2 \leq B / \sqrt{1+K}; \quad \Delta x_1 \leq (K / \sqrt{K+1}) B. \quad (17)$$

Полученные решения, как следует из (7) – (9), являются функциями параметра α и требуемой точности их решения δ .

Их определяют из условия, приведенного в [3]:

$$\rho(\alpha) = \left\| A\tilde{X}_\alpha - \tilde{Y} \right\| - \delta \rightarrow \min, \quad (18)$$

где \tilde{X}_α – вектор оценок (7, 8) неизвестных, полученных при данном α . Обозначим $\tilde{X}_i(\alpha)$, ($i = 1, 2$), численные значения x_i , полученные при данном α .

Тогда условие (18) примет вид:

$$\rho(\alpha) = \left| \sqrt{\left(\tilde{X}_1(\alpha) + \tilde{X}_2(\alpha) - 1\right)^2 + \left(a\tilde{X}_1(\alpha) + b\tilde{X}_2(\alpha) - (g + \Delta g)\right)^2} - \delta \right|. \quad (19)$$

Задавшись интервалами $[\delta_1; \delta_2]$ и $[\alpha_1; \alpha_2]$, условие (19) минимизируют по переменным δ и α .

Более подробно процедура минимизации описана в [5]. Вычисленные при этом x_1^* и x_2^* будут оценками неизвестных величин x_1 и x_2 , полученными с требуемой точностью.

В том случае, когда по технологическим условиям преобразование системы (1) к виду (2) нежелательно, используем следующий прием.

Перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} CK^{(1)} + h\Pi^{(1)} + m\Pi^{(1)} + B = 1; \\ K^{(2)} + \Pi^{(2)} + q\Pi^{(2)} = \gamma_\delta, \end{cases} \quad (20)$$

где $C = 1/\gamma_\delta$, $h = 1/\gamma_\Pi$, $m = 1/\rho_\Pi$. В этом случае получим систему двух линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными: K , Π , Π , B .

Ее решение получим, используя метод интервалов [6]. Для этого введем вспомогательные неизвестные $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, B и вспомогательную функцию F вида:

$$F = \left(CK^{(1)} - K^{(2)}\right)^2 + \left(h\Pi^{(1)} - \Pi^{(2)}\right)^2 + \left(m\Pi^{(1)} - q\Pi^{(2)}\right)^2 + B^2 + \left(CK^{(1)} + h\Pi^{(1)} + m\Pi^{(1)} + B - 1\right)^2 + \left(K^{(2)} + \Pi^{(2)} + q\Pi^{(2)} - \gamma_\delta\right)^2. \quad (21)$$

Минимизируя (21) по каждой из вспомогательных переменных и приравнявая соответствующие частные производные нулю, получим:

$$\begin{cases} 2CK^{(1)} - K^{(2)} + h\Pi^{(1)} + m\Pi^{(1)} = 1; \\ -CK^{(1)} + 2K^{(2)} + \Pi^{(2)} + q\Pi^{(2)} = \gamma_\delta; \\ CK^{(1)} + 2h\Pi^{(1)} - \Pi^{(2)} + m\Pi^{(1)} + B = 1; \\ K^{(2)} - h\Pi^{(1)} + 2\Pi^{(2)} + q\Pi^{(2)} = \gamma_\delta; \\ CK^{(1)} + h\Pi^{(1)} + 2m\Pi^{(1)} - q\Pi^{(2)} + B = 1; \\ CK^{(1)} + h\Pi^{(1)} + m\Pi^{(1)} + 2B = 1; \\ K^{(2)} + \Pi^{(2)} - m\Pi^{(1)} + 2q\Pi^{(2)} = \gamma_\delta. \end{cases} \quad (22)$$

Примем, что $K^{(1)*}$, $K^{(2)*}$, $\Pi^{(1)*}$, $\Pi^{(2)*}$, $\Pi^{(1)*}$, $\Pi^{(2)*}$, V^* – решение этой системы. Пусть K_{\min} – наименьшее значение, K_{\max} – наибольшее из пары $K^{(1)*}$, $K^{(2)*}$. Аналогичные обозначения введем для остальных неизвестных.

Тогда решением системы (22) в смысле, указанном в [6], будет такое:

$$K_{\min} \leq K \leq K_{\max}; \Pi_{\min} \leq \Pi \leq \Pi_{\max};$$

$$\Pi_{\min} < \Pi < \Pi_{\max}; V = V^*.$$

Выводы. 1. Получено в явном виде классическое решение плохо обусловленной системы преобразованных уравнений, описывающих процесс подбора состава легких бетонов.

2. Получено интервальное решение этой же системы в исходном виде.

3. В каждом из этих случаев определены допустимые погрешности переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов Ю.М. Способы определения состава бетона различных видов. – М.: Стройиздат, 1975. – 268 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 223 с.
3. Степанов Н.Ф., Ерлыкина М.Е., Филиппов Г.Г. Методы линейной алгебры в физической химии. – М.: Изд. МГУ, 1976. – 359 с.
4. Иванюков Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 199 с.
5. Дубницкий В.Ю., Чернявский В.Л. Регуляризация расчета уравнений регрессии при моделировании свойств цементных бетонов // Всесоюзный симпозиум по обобщению задачи идентификации сложных систем. – Х.: ХГУ. – 1979. – 273 с.
6. Бобрицев А.В., Рудченко Н.А., Решотка Х.С. Решение некоторых нестандартных задач линейной алгебры и линейного программирования // АН УССР, Институт проблем энергосбережения. Препринт 91-5. – К.: ИПЭ. – 1991. – 35 с.
7. ДСТУ БВ.2.7-18-95 Будівельні матеріали. Бетони легкі. Загальнотехнічні умови.

Поступила 24.01.2003

ДУБНИЦКИЙ Валерий Юрьевич, кандидат технических наук, доцент Харьковско-го филиала Украинской академии банковского дела. В 1975 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – исследование операций.

НАНИКАШВИЛИ Вахтанг Григорьевич, кандидат технических наук, доцент Харьковской Государственной академии городского хозяйства. В 1965 году окончил Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта. Область научных интересов – технология легких бетонов.