

РЕДУКЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ЕЕ ПОВОРОТЕ И СДВИГЕ

к.т.н. А.В. Кошель, М.Ю. Пакшин, Д.С. Явтушенко
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

Предложена математическая обработка двух изображений участка поверхности, полученных оптической системой при ее повороте и сдвиге, что дает возможность восстановления адекватного представления об объекте.

Введение. При контроле интересующих исследователя объектов необходимо получить расчеты, при которых рассматриваются два изображения участка поверхности, сформированные одной и той же оптической системой. Они отличаются тем, что второе изображение получено после поворота системы вокруг оптической оси и, возможно, сдвига. На том и другом изображении присутствует фрагмент, интересующий исследователя, однако разрешение оптической системы недостаточно для того, чтобы сформировать у исследователя адекватное представление об изображенном объекте (рис. 1).

Цель статьи: путем совместной математической обработки (редукции) обоих изображений получить результат, обладающий лучшим качеством (разрешением, уровнем шумов), чем каждое отдельно взятое изображение (рис. 1).

Как правило, если передаточная функция оптической системы не является инвариантной по отношению к произвольному повороту (например, как в случае многоапертурной оптической системы), то простое совмещение и сложение изображений не приведет к уменьшению погрешности результата по сравнению с погрешностью каждого слагаемого, так как для таких систем размытые точки зависят от направления и после поворота и совмещения выделенных фрагментов будут складываться изображения, обладающие различными смазами [6].

Предлагаются методы совместной редукции изображений, полученных системами с различными передаточными функциями, методы совмещения таких изображений.

1. Описание математической модели измерения изображений. Пусть f – фрагмент идеального изображения, полученного "идеальной" оптической системой с бесконечно большой апертурой, $A(u)$ – оператор, описывающий искажающее влияние на изображение f реальной оптической системы так, что $A(u)f$ – реальное изображение фрагмента на выходе

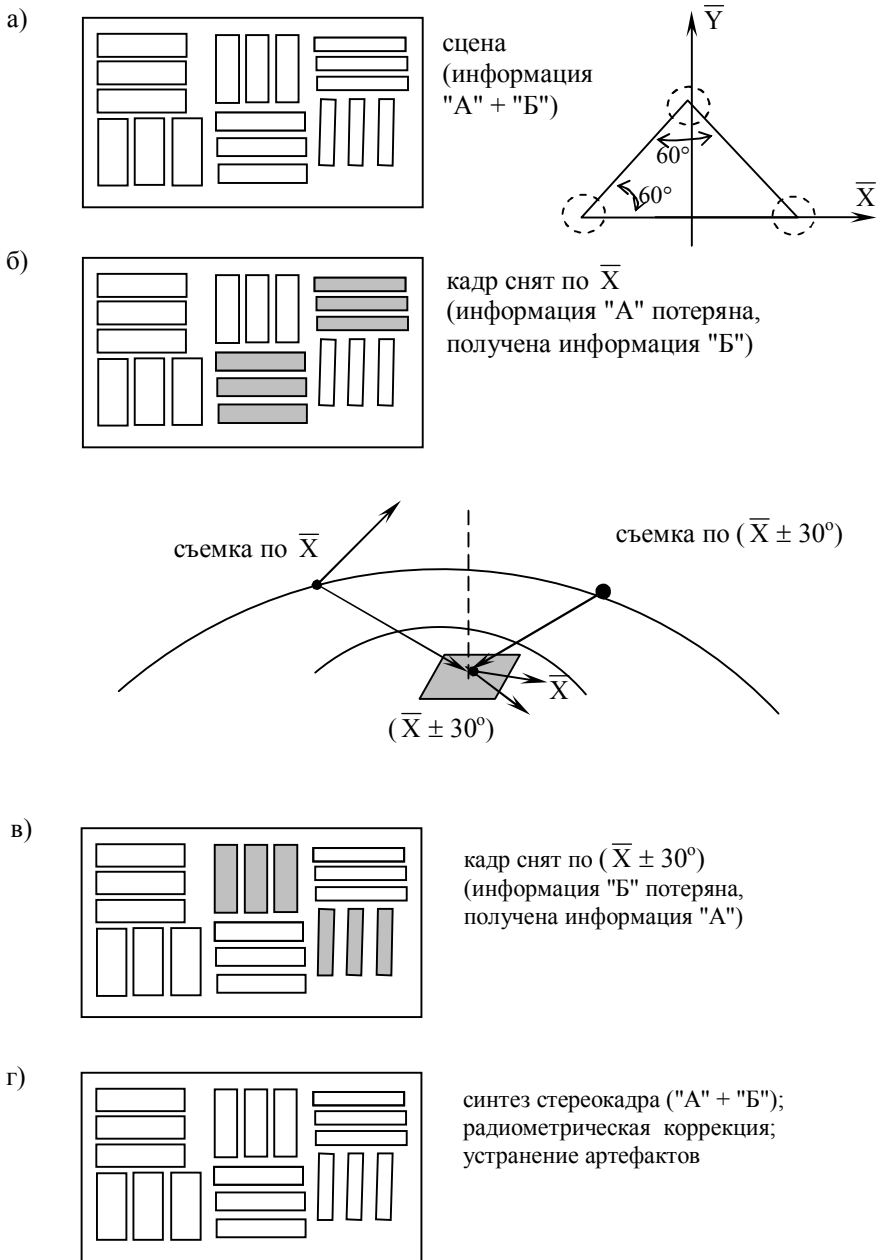


Рис. 1. Схема съёмки и синтеза результирующего кадра

оптической системы, параметр ν описывает характеристики оптической системы (поворот вокруг оптической оси и, возможно, сдвиг). Результат измерения ξ реального изображения искажается шумом ν , который будем считать аддитивным, т.е.:

$$\xi = A(x)f + \nu. \quad (1)$$

Будем считать все изображения элементами векторных евклидовых конечномерных пространств [5]. Пусть фрагмент f выбран так, что для всех значений параметра ν из множества допустимых значений θ изображение ξ можно записать в виде (1), и пусть первое изображение сформировано при некотором $\nu = \nu_1$, а второе при некотором $\nu = \nu_2$, так, что:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A(x_1)f + \nu_1; \\ \xi_2 &= A(x_2)f + \nu_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Как правило, на практике точные значения ν_1 и ν_2 неизвестны, однако заметим, что для рассматриваемых задач в силу свойств оптических систем важен лишь относительный сдвиг и поворот первой и второй систем. Поэтому, не ограничивая общности, положим $\nu_1 = 0$, а $\nu_2 = \nu$. Тогда из (1) и (2):

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x_1) \\ B(x_2) \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Будем считать f произвольным вектором евклидова пространства N размерности N , ξ_1 , ξ_2 , ν_1 , ν_2 – случайными векторами евклидова пространства R размерности n , $2n > N$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ – вектором пространства $R \times R$ -раз-

мерности $2n$, $A = \begin{pmatrix} B(x_1) \\ B(x_2) \end{pmatrix}$ – заданным линейным оператором, действующим

из N в $R \times R$, вектор ν из $R \times R$ – обладающим нулевым математическим ожи-

данием $Ev = 0$ и ковариационным оператором $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 0 \\ 0 \Sigma_2 \end{pmatrix}$. Иными словами,

будем считать, что задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерения (3) [1].

2. Совместная обработка изображений при заданном параметре ν . Выбор оптимального значения параметра. Рассмотрим измерение фрагмента изображения f , проводимое по схеме (3). По результату наблюдения двух изображений требуется получить наиболее точную оценку f , пользуясь моделью измерения $[A, \Sigma]$. Для этого найдем линейное преобразование R вектора ξ , так, чтобы $R\xi$ было бы как можно ближе к f :

$$R\xi = RAf + R\nu = f + (RA - I)f + R\nu.$$

Если f – произвольное изображение из H , то $\sup_f \|(RA - I)f\| = \infty$ при $RA \neq I$ и требование конечности погрешности оценивания приводит к условию [7]:

$$RA = I, \quad (4)$$

накладываемому на возможные преобразования R . Среди всех решений операторного уравнения (4) выберем такое, которое минимизирует среднеквадратическую (с.к.) погрешность $E\|R\eta\|^2$ оценки $R\xi$. Таким образом, искомое преобразование R является решением задачи на минимум [2]:

$$\inf \{ E\|R\eta\|^2 \mid R : RA = I \}. \quad (5)$$

Если $A^{-1}A = I$, то задача (5) имеет решение $R = (\Sigma^{-1/2}A)^{-1}\Sigma^{-1/2}$, где знак "минус" над оператором означает псевдообращение [3], $\Sigma^{-1/2}$ – неотрицательный квадратный корень из оператора, обратного к Σ ; в противном случае задача (5) неразрешима [1, 2]. Оценка $R\xi$ изображения f при выполнении условия $A^{-1}A = I$ является несмещенной оценкой с с.к. погрешностью $E\|R\eta\|^2 = \text{tr}(A^*\Sigma^{-1}A)^{-}$. Т.к. оператор $A = A(v)$ зависит от параметра v , то естественно выбрать v так, чтобы минимизировать погрешность $E\|R\eta\|^2 = \text{tr}(A^*(v)\Sigma^{-1}A(v))$ по всем v из множества θ , т.е. v следует выбирать равным v_{opt} , являющимся решением задачи на минимум

$$v_{\text{opt}} = \arg \min \left\{ \text{tr} \left(A^*(v) \Sigma^{-1} B(v) \right)^{-} \mid x \in \theta \right\}. \quad (6)$$

На практике соотношение $A^{-1}A = I$ не всегда выполнено, кроме того, множество решений уравнения (4) может оказаться достаточно узким, так что величина погрешности $E\|R(v_{\text{opt}})v\|^2$ неприемлемо велика, поэтому, как правило, вместо решения задачи (5) приходится выбирать преобразование R , ограничиваясь уровнем шума Rv и минимизируя отличие “прибора” RA от идеального, задаваемого единичным оператором I . Это отличие будем характеризовать квадратом нормы Гильберта-Шмидта $\|RA - I\|_2^2 = \text{tr}(RA - I)(RA - I)^*$ [1]. Задача редукции с ограничением на уровень шума ставится как задача на условный экстремум

$$\inf \left\{ \|RA - I\|_2^2 \mid R : E\|R\eta\|^2 \leq \varepsilon \right\}. \quad (7)$$

При $0 < \varepsilon \leq \text{tr}(A^*(v)\Sigma^{-1}A(v))^{-}$ решение (7) имеет вид [1, 2] $R = R(\omega) = A^*(AA^* + \omega\Sigma)^{-1}$, где $\omega = \omega_\varepsilon$ – корень уравнения $E\|R(\omega)\eta\|^2 = \varepsilon$. Как показано в [1, 2], выбору v_{opt} из (6) соответствует наиболее глубокий минимум в (7) при всех ε , $0 < \varepsilon \leq \text{tr}(A^*(v)\Sigma^{-1}A(v))^{-}$.

3. Совмещение изображений. Принцип максимальной надежности.

Вернемся к схеме измерения (3) и будем считать, что параметр $\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ неизвестен. На практике возможно грубое ручное совмещение изображений, однако, для нужд совместной обработки изображений ξ_1 и ξ_2 требуется как можно более точное совмещение изображений. Заметим, что для решения задач редукции этих изображений вовсе не нужно их "физическое" совмещение, достаточно указать лишь значение параметра υ ; преобразование R учит поворот и сдвиг изображения ξ_2 относительно ξ_1 при редукции [3].

Критерием выбора параметра υ будем считать согласие модели $[A(\upsilon), \Sigma]$ с результатами наблюдения, т.е. с изображениями ξ_1 и ξ_2 . В качестве характеристики согласия υ и ξ выберем надежность модели $\left[A = \begin{pmatrix} B(x_1) \\ B(x_2) \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 0 \\ 0 \Sigma_2 \end{pmatrix} \right]$ измерения (2). По условию, размерность вектора-изображения f меньше, чем $2n$, т.е. чем размерность изображения ξ . Запишем формально схему измерения (2) в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{2n} \end{pmatrix} = (a_1 \dots a_N) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{2n} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N a_k f_k + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{2n} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где a_k – вектор-столбец матрицы A , размерность a_k равна $2n$. Выражение (8) позволяет заметить, что $2n$ -мерный вектор Af является элементом M -мерного подпространства $L(a_1, \dots, a_N)$, $M \leq N$, натянутого на вектор-столбцы матрицы A , а наблюдаемый вектор ξ есть сумма вектора из L и случайного вектора v с нулевым средним и ковариационным оператором Σ . Вектор v можно разложить на составляющую v_1 , лежащую в L , и v_2 , ортогональную к L . Если вектор ξ лежит "достаточно близко" к $L(a_1, \dots, a_N)$ так, что расстояние от ξ до L можно объяснить наличием вектора v_2 , то модель измерения (8) не противоречит наблюдению ξ . В противном случае модель следует отвергнуть как несогласующуюся с измерением.

Квадрат расстояния от ξ до $L(a_1, \dots, a_N)$ равен

$$\tau_\xi = \left(\Sigma^{-1} \xi, \left(I - A(A^* \Sigma^{-1} A)^{-1} A^* \Sigma^{-1} \right) \xi \right). \quad (9)$$

Если v контролируется распределением $N(O, \Sigma)$, то в случае верной модели τ_ξ имеет χ^2 -распределение с $2n - M$ степенями свободы, а если модель неверна (т.е. вместо оператора A в (2) стоит оператор $A(\upsilon) \neq A$), и $(I - A(A^* \Sigma^{-1} A)^{-1} A^* \Sigma^{-1})A(\upsilon)f \neq 0$, то τ_ξ имеет нецентральное χ^2 -распределение с $2n - M$ степенями свободы. Для характеристики согласия этих гипотез с измерениями в [4] введен параметр надежности модели в виде

$$a(\xi) = 1 - F_{M-2n}(\tau_\xi), \quad (10)$$

где $F_{M-2n}(\cdot)$ – функция χ^2 -распределения с $2n - M$ степенями свободы. Надежность $a(\xi)$ – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$ в случае верной модели, и ее распределение концентрируется вблизи нуля при неверной модели [4].

Принцип максимальной надежности при выборе параметра v при совместной обработке изображений ξ_1 и ξ_2 состоит в том, чтобы выбрать при редукции неизвестный параметр v , максимизируя надежность (10), т.е. из соотношения

$$\bar{v} = \arg \max \{a_n(v) | v \in \Theta\}. \quad (11)$$

Вообще говоря, этот принцип (аналогично принципу максимального правдоподобия) является эвристическим, однако при стремлении объема выборки (т.е. $2n$) к бесконечности оценки, полученные на основании этого принципа, сходятся (с вероятностью единица) к точному значению $A^{-1}Af$ и обладают асимптотической нормальностью, что позволяет получить асимптотическую оценку их погрешности.

Теорема. Пусть класс операторов $\{A(v), v \in \Theta\}$ и вектор f таковы, что функция распределения нормального закона $F_x(x)$ для вектора ξ сходится к F_{x_0} (x равномерно по всем $x \in R \times R$ при $v \rightarrow v_0$, функционал $E_{v_0}(\Sigma^{-1}\xi, (I - A(v)(A^*(v)\Sigma^{-1}A(v))^{-1}A^*(v)\Sigma^{-1})\xi) = d(v, v_0)$ непрерывен по v в точке v_0 , $\Sigma^{-1/2}A(v)f$ не принадлежит множеству значений оператора $\Sigma^{-1/2}A(v_0)$ для всех v из окрестности точки v_0 . Тогда $v = \arg \max \{a_n(v) | v \in \Theta\}$ сходится к v_0 при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица, а полученное с его помощью решение $R(\bar{v})\xi$ задачи редукции (5) сходится к $A^{-1}Af$ почти наверняка. Если, кроме того, вектор $A^{-1}AR(v)u$ при фиксированном u имеет в точке $v = v_0$, $y = y_0 = A(v_0)f$ производную $W(y, v) \in (R_N \rightarrow R_k)$ по $v \in R_k$, то последовательность случайных векторов $\{(R(\bar{v})\xi - Uf)(2n)^{1/2}\}$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к нормальному распределению $N(0, Y)$, где ковариационный оператор $Y \in (R_N \rightarrow R_N)$ равен

$$Y = U \left(B(x)U^{-1}B^*(x) \right) \Big|_{y=y_0, x=x_0} U^* + W^*TW,$$

здесь $T = (B^*(y_0, v_0))^{-1}C^*(y_0, v_0)\Sigma C(y_0, v_0)B^{-1}(y_0, v_0)$, $C(y, v) \in (R_k \rightarrow R_N)$ – смешанная производная функционала

$$t(y, x) = \left(y^{-1}y, (I - A(v)) \left(A^*(v)\Sigma^{-1}A(v) \right)^{-1} A^*(v)\Sigma^{-1} \right) y$$

по x и y , $B(y, v) \in (R_k \rightarrow R_k)$ – его вторая производная по v , и предпола-

гается, что эти производные существуют, первая производная $t(y, v)$ по v обращается в нуль в единственной точке (y_0, v_0) , $B(y_0, v_0)$ – обратимый оператор, и $B(y, v)$ непрерывен по v и y в точке (y_0, v_0) .

Выводы. В статье приведены математические методы определения параметра рассовмещения изображений без использования опорных реперных точек и методы совместной обработки изображений, полученных при различных значениях параметров рассовмещения с целью повышения качества изображения, а также метод априорного выбора значения параметра рассогласования, обеспечивающего наименьшую погрешность редуцированного (восстановленного) изображения. Даны методы оценки погрешностей восстановленного изображения; в случае, когда производится совмещение изображений на основе принципа максимальной надежности, оценки погрешности являются асимптотическими и могут давать приближенные результаты при больших размерностях обрабатываемых изображений (или при малых значениях погрешности измерения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю.П. *Методы анализа и интерпретации эксперимента*. – М.: Издательство Московского университета, 1998. – 242 с.
2. Пытьев Ю.П. *Математические методы интерпретации эксперимента*. – М.: Высшая школа, 1996. – 288 с.
3. Пытьев Ю.П. *Псевдообратный оператор. Свойства и применения* // Математический сборник, 1992. – Т. 118 (160). – № 1. – С. 19 – 49.
4. Пытьев Ю.П. *О точности и надежности интерпретации косвенных измерений*. – Докл. АН СССР, 1987. – Т. 295. – № 3. – С. 542 – 545.
5. Павлов В.М. *Системный анализ сложных систем*. – М.: МО РФ, 1999.
6. Сухорученков Б.И. *Обработка информации летательных аппаратов*. – М.: МО СССР, 1991. – 184 с.
7. Саваневич В.Е., Кошель А.В., Ветлугин Е.В. *Оценка координат объектов оптикоэлектронными средствами наблюдения* // Информационные системы. – Х.: НАНУ, ПАНИ, ХВУ. – 1997. – Вып. 1 (5). – С. 64 – 69.

Поступила 20.02.2003

КОШЕЛЬ Анатолий Васильевич, канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры ХВУ. В 1979 г. окончил ХИРЭ, в 1990 г. – ВАД. Области научных интересов – структурный синтез территориально распределенных систем, математическое моделирование, техническое состояние сложных технических систем.

ПАКШИН Максим Юрьевич, старший инженер сектора отдела ПОИ (г. Дунаевцы), соискатель ХВУ. Окончил ХВУ в 2001 г. Области научных интересов – структурный синтез территориально распределенных систем, математическое моделирование.

ЯВТУШЕНКО Дмитрий Сергеевич, слушатель КШФ ХВУ. Область научных интересов – математическое моделирование.