УДК 518.853.4

МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СОЕДИНЕНИЙ ПО ТОПОЛОГИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

к.т.н. Н.В. Белоус, А.С. Смелякова
(представил д.т.н., проф. В.П. Путятин)

Поставлена задача поиска оптимального пути в неодносвязной области, который при некоторых ограничениях минимизирует заданный функционал и обращает в минимум число пересечений с заданной сетью. Предложен метод ее решения, основанный на топологической факторизации пространства путей.

Постановка проблемы и анализ литературы. Рост возможностей вычислительной техники и программных систем общего назначения позволяют автоматизировать все более широкий класс задач проектирования и управления на основе развития соответствующих методов моделирования и оптимизации. В полной мере это можно отнести и к обширному разделу геометрического проектирования [1], а именно к задачам соединения [1, 2], которые связаны с поиском оптимальных трасс транспортных и инженерных коммуникаций в областях сложной геометрической формы (неодносвязных многообразиях), где функционалы и ограничения таковы, что к решению соответствующих задач не могут быть применены традиционные методы вариационного исчисления или математического программирования; в частности, в данном случае, когда экстремали могут пересекать ребра заданной сети.

Задачи соединения подобного типа возникают в практике проектирования автомобильных дорог [3, 4] и железнодорожных линий [5], различных типов инженерных сетей [6 – 11]: магистральных трубопроводов, канализации и водопровода, тепловых сетей, гидроузлов, а также при проектировании развития и обустройства регионов [12, 13]. Кроме того, актуальной проблемой повышения уровня экологической и техногенной безопасности [14] является не только предупреждение чрезвычайных ситуаций, но и уменьшение их материальных и социальных последствий за счет повышения эффективности мониторинга и управления процессами ликвидации последствий аварий на объектах ядерной и химической промышленности; в частности, при оперативном планировании маршрутов движения крупногабаритной и специальной техники по пересеченной местности и в экстремальных условиях [15], когда требуется найти трассу, имеющую минимальное число пересечений с распределенными объектами, представляющими помехи для движения в целях оперативной оптимизации сил и средств, выделенных для ликвидации последствий аварий.

Поэтому актуальной проблемой повышения эффективности проектов и минимизации последствий чрезвычайных ситуаций является развитие моделей и методов решения задач соединения рассматриваемого типа. Хотя они характеризуются чрезвычайным разнообразием критериев оптимальности и ограничений, накладываемых на геометрические параметры трасс, и не сводятся к известным [1, 16] моделям геометрического моделирования, общим аспектом задач этого типа является нерешенная проблема поиска трассы на местности, имеющей минимальное число пересечений с “помехами” типа рек, железнодорожных путей, ограждений и иных объектов, преодоление которых возможно, но влечет существенные дополнительные затраты (по времени или обобщенной стоимости). Математически это задача на построение оптимального пути в области, имеющей сложную геометрическую конфигурацию, в условиях лексикографической оптимизации, когда важнейшим критерием является число пересечений с заданными сетями, ребра которых считаем неориентированными.

Цель статьи. По основному критерию рассматриваемый класс прикладных задач сводится к задаче оптимизации на топологической модели области, которую можно сформулировать следующим образом.

Задача. В двумерном многообразии F дана сеть $H = \{h_i\}_{i=1}^{m}$ и пара точек A, B. Требуется найти соединяющий эти точки путь $p_* \subset F$, который удовлетворяет заданным ограничениям Q и при минимальном числе пересечений с ребрами сети H минимизирует некоторый функционал f. При этом путь p_* может пересекать ребра сети H только во внутренних точках ребер.

Разработка метода решения этой базовой задачи и представляет цель данной работы.

Топологическая модель задачи. Рассмотрим поставленную задачу в предположении, что многообразие F задано следующим образом:

$$F = \mathrm{Cl}\,D_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}\,D_i \right), \tag{1}$$

где Cl – операция замыкания [17]. Сеть H не обязательно связана, а ее ребра могут касаться границ L_i односвязных областей $D_i, (i = 0,1,...,n)$, только в вершинах.

Существенное отличие данной задачи от родственных задач, рассматриваемых в теории графов и при оптимизации в выпуклых областях, состоит в использовании континуальной модели допустимой области, которая не является выпуклой или односвязной. Необходимость рассмотрения подобных геометрических моделей обусловлена тем, что в ряде приложений дискретные или выпуклые модели не обеспечивают требуемой точности, приводят к необходимости ручной доработки машинного решения, а также могут вызвать затруднения при учете различных технологических ограничений.

Для описания континуальных пространств путей [17] (где путь понимается как непрерывное отображение единичного отрезка в многообразие) была разработана дискретно-континуальная модель, основу которой составляет базис классов эквивалентности путей [2]. Он определяет конечную совокупность путей, всевозможные произведения которых порождают непрерывные семейства путей в соответствующем многообразии F. При этом следует иметь в виду, что хотя геометрические образы самопересекающихся путей В $p = ACDECB$ и $q = ACEDCB$ совпадают (рис. 1), на топологическом базисе они определяют различные классы путей, причем первый из них посредством деформации в F определяет кратчайший путь из A в B – отрезок AB (заштрихованная область на рис.1 задает “область запрета”).

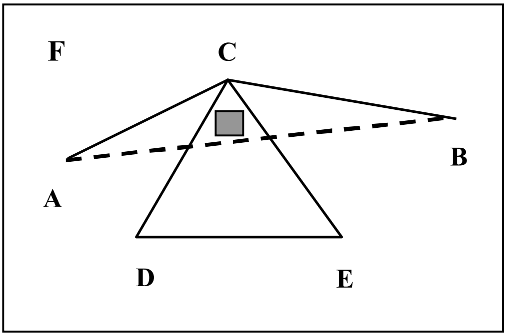

Рис. 1. Самопересекающийся путь ACDECB
и определяемая им кратчайшая AB

При использовании данного подхода на уровне топологической модели применимы различные методы дискретной оптимизации, связанные с перебором экстремалей, определяемых различными классами эквивалентности путей (например, [1, 18]). На непрерывном уровне используются методы вариационного типа, связанные с применением оптимизирующей деформации, т.е. такой деформации [17] пути, которая приводит к получению экстремали в данном классе с учетом ограничений Q метрического характера.

Метод решения задачи. В данной работе этот подход применяется к решению поставленной задачи в предположении существования соответствующей оптимизирующей деформации φ для функционала f. С этой целью переходим от геометрической модели (1) многообразия F к дискретной посредством построения базиса классов эквивалентности путей (далее просто базиса), считая вершины сети H (рассматриваемой как геометрический объект) областями запрета. Затем, интерпретируя полученную дискретную модель как граф, выделяем порождаемые им простые [2] пути $\tau_* = \{\tau_i\}_i$, имеющие минимальное число пересечений с ребрами сети H.

После этого, применяя к путям из τ_* требуемую оптимизирующую деформацию φ, получим полный набор экстремалей $\{\varphi\,\tau_i\}_i$.

Рассмотрим сеть $S = H \bigcup_{i=0}^{n} L_i$. Выделим в ней все ребра со свободным концом и обозначим H_1 образуемую ими сеть. Если множество H_1 не пусто, выделим на сети $S \setminus H_1$ все ребра со свободным концом и обозначим их H_2; продолжаем выделять подобные ребра до выполнения соотношений $H_{k-1} \neq \phi$, $H_k = \phi$. Объединение сетей $\{H_i\}_{i=1}^{k}$ обозначим S_1. Компоненты связности сети S_1 обозначим $\{S_j^1\}_{j=1}^{j_1}$. Ясно, что экстремаль p_* не должна пересекать сеть S_1.

Сеть $S \setminus S_1$ имеет столько же компонент связности, сколько содержит сеть S. Могут найтись такие компоненты связности сети $S \setminus S_1$, что в определяемых ими разбиениях пространства R^2 ни одна из ограниченных областей не содержит ни точку A, ни точку B. Объединение подобных дизъюнктных сетей $\{S_j^2\}_{j=1}^{j_2}$ обозначим S_2 и положим $S_* = S \setminus (S_1 \cup S_2)$. По построению каждая сеть S_j^2 не имеет ребер со свободным концом и разбивает R^2 на одну неограниченную и некоторое число ограниченных областей (граней), объединение которых с сетью S_j^2

обозначим E_j. Очевидно, что экстремаль p_* не должна иметь общих точек с замкнутыми односвязными множествами E_j.

Множество $\{E_j\}_{j=1}^{j_2}$ можно разбить на два подмножества E' и E'' так, что любая пара множеств из E' дизъюнктна (т.е. не имеет общих точек), а любое множество из E'' покрывается некоторой областью из E'. Аналогично разобьем множество сетей $\{S_j^1\}_{j=1}^{j_1}$ на два подмножества S' и S'' так, что все сети из S_1, покрытые множествами из E', лежат в S''. Можно считать, что $E = E'$, а $S_1 = S'$.

Сеть S_* разбивает D_0 на некоторое число областей $\{z_i'\}_{i=0}^{k}$, $\{z_i''\}_{i=0}^{l}$, где z_i'' – те из областей D_i, которые покрыты множествами из E_j. Если $l = 0$, это означает, что таких областей не существует.

Связные сети $\{S_j^1\}_{j=1}^{j_1}$ и замкнутые односвязные множества $\{E_j\}_{j=1}^{j_2}$ лежат в областях z_i' и не должны иметь общих точек с экстремалью. Сеть S_* может быть несвязной, даже если исходная сеть H связна. Поскольку экстремаль не должна содержать точек, общих с множеством $\mathrm{Cl}\, D_i, (i = 0,1,...,n)$, отнесем области z'' (совпадающие с некоторой областью D_i, граница L_i которой и сеть H дизъюнкты) к множеству E, удаляя из сети S_* соответствующие компоненты связности – простые замкнутые кривые, являющиеся границами областей D_i.

В результате получаем, что сеть S_* разбивает D_0 на области $\{z_i'\}_{i=0}^{k}$ и $\{z_i''\}_{i=0}^{k_1}$. Каждая область z_i' является гранью сети S_*. В каждой из граней z_i' соответствующие множества из S_1 или E определяют область $z_i \subset z_i'$, допустимую для прохождения экстремали. Точки A и B лежат в некоторых областях из $\{z_i\}_i$ и существует конечная последовательность областей $z_{i_1}, z_{i_2}, ..., z_{i_q}$, где области z_{i_k} и $z_{i_{k+1}}$ попарно смежны (т.е. имеют общее ребро, принадлежащее сети H) и $z_A = z_{i_1}$, $z_B = z_{i_q}$. Поскольку экстремаль не должна касаться границ L_i по условию, то, говоря далее о пересечении ребра сети S_*, будем иметь ввиду те ребра, что принадлежат сети H.

Таким образом, каждому пересечению экстремали p_* с сетью H взаимно однозначно соответствует пересечение с границей области z_i.

Рассмотрим граф GS, совпадающий с полученной сетью. Его гранями будут области z'_i.

Если точки A и B лежат в одной области z_i, то воспользовавшись методом, изложенным в [2], и применяя оптимизирующую деформацию φ, можем минимизировать функционал f при ограничениях Q в классе эквивалентности путей $[\tau]$. Проделать это можно для всех классов эквивалентности путей, лежащих в области z_i (а значит, не имеющих пересечений с границей области z_i). Поскольку $z_i \subset z'_i$, то рассматриваемый путь не будет иметь пересечений и с границей области z'_i, т.е. будет в одной грани графа GS.

Пусть точки A и B лежат в различных областях $z_A = z_{i_1}$ и $z_B = z_{i_2}$, причем $i_1 \neq i_2$. Тогда существует конечная последовательность попарно смежных областей $\{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_\gamma}\}$, $z_{i_1} = z_A$, $z_{i_\gamma} = z_B$. Понятно, что при $\gamma > 1$ построенный путь пересечет по крайней мере γ ребер сети S(H), поэтому для решения поставленной задачи необходимо найти кратчайшую последовательность (т.е. последовательность с минимальным числом членов) смежных областей подобного вида. Но поскольку $z_i \subset z'_i \quad \forall i$, достаточно искать кратчайшую последовательность смежных граней графа $\{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_\gamma}\}$, где $z_A \subset z'_i$, $z_{i_j} \subset z'_{i_j}$, $\forall j = 2, 3, \dots, \gamma - 1;$ $z_B = z'_{i_\gamma}$.

Заметим, что последовательностей с одинаковым (минимальным) числом членов может оказаться несколько, тогда процедуру выбора экстремали будем проводить для каждой такой последовательности.

Для отыскания кратчайшей последовательности (последовательностей) смежных граней графа GS построим вспомогательный граф GZ. Вершинами графа GZ объявим конечные грани графа z'_i. Вершины графа GZ будем обозначать так же, как и соответствующие грани графа GS, т.е. грани z'_i отвечает вершина z'_i графа GZ. Множество ребер графа GZ определим следующим образом: ребро $z'_i z'_j$ между вершинами z'_i и z'_j в графе GZ существует в том и только в том случае, если соответствующие грани (z'_i и z'_j) графа GZ смежные.

Если $A \subset z'_A$, а $B \subset z'_B$, то будем искать на графе GZ кратчайший путь из вершины z'_A в вершину z'_B. Поскольку все вершины графа GZ равноправны, можно считать, что все они имеют вес 1, а, следовательно, для поиска кратчайшего пути на графе GZ можно применять любой из известных алгоритмов [18], учитывающий требования к простым путям, изложенные в [2]. Найдя минимальный путь из вершины z'_A в вершину z'_B на графе GZ, находим кратчайшую последовательность смежных граней графа GS. После этого получаем область, содержащую пути $\tau_* = \{\tau_i\}_i$, имеющие минимальное число пересечений с сетью H. При этом экстремали функционала f получаются также, как и в случае, когда точки A и B лежат в одной области – посредством применения оптимизирующей деформации φ к путям из τ_*.

Выводы. Предложенный метод решения поставленной задачи оптимизации соединений в неодносвязных областях по топологическому критерию – числу пересечений с ребрами заданной сети – обеспечивает полноту перебора экстремалей и возможность минимизации функционалов достаточно общего вида, причем с помощью известных дискретных и вариационных методов. При этом затраты памяти, что существенно для задач данного класса, имеют линейную зависимость от размерности данных сетей H, $\{L_i\}_{i=0}^n$.

В качестве дальнейшего развития предложенного подхода представляется целесообразным рассмотреть лексикографическую оптимизацию, введя второй по значимости критерий, учитывающий метрические параметры трасс.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Элементы теории геометрического проектирования / И.В. Аристова, В.М. Комяк, С.В. Смеляков, С.В. Яковлев и др. – К.: Наук. думка, 1995. – 247 с.*
2. *Смеляков С.В. Топологическое моделирование сетей в задачах геометрического проектирования // Электронное моделирование. – 1993. – № 3. – С. 87 – 83.*
3. *Бойков В.Н., Шумилов Б.М., Люст С.Р. Трассирование автомобильных дорог: аспекты компьютерной реализации // Автомобильные дороги. – 1995. – № 12. – С. 23 – 25.*
4. *Білятинський О.А., Цибенко Ю.А., Старовойда В.П., Ігнатов С.Л. Методи розв'язання математичної моделі побудови оптимальної дорожньо-транспортної мережі // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – Вип. 54. – К.: Техніка. – 1997. – С. 51 – 54.*
5. *M. Van Witsen. The Netherlands and New International Rail Infrastructure // Tijdschrift voor Economische en Sociale Geografie. – 1996. – № 2. – P. 181 – 187.*

6. *Найденов В.М., Коршунова Л.Г., Любченко Л.А. Комплексное математическое моделирование системы пласт-скважины-газосборная сеть // Газовая промышленность. – 1991. – № 9. – С. 28 – 29.*
7. *Коваленко А.Г. О сводимости задачи идентификации параметров элементов гидравлических цепей к задачам потокораспределения // Труды XI-й Международной Байкальской школы-семинара. – Иркутск: Иркутский госуниверситет. – 1998. – С. 99 – 102.*
8. *Каганович Б.М., Меренков А.П., Балышев О.А. Элементы теории гетерогенных гидравлических цепей. – Н-ск: Наука, 1997. – 120 с.*
9. *Балышев О.А., Каганович Б.М., Меренков А.П. Трубопроводные системы тепло- и водоснабжения как динамические модели гидравлических цепей // Изв. РАН, сер. Энергетика. – 1996. – № 2. – С. 96 – 104.*
10. *Аристова И.В., Литвинов В.Н. Математическая модель задачи рационального размещения оборудования в машинном зале энергоблока ТЭС // Пробл. машиностроения. – 1983. – № 19. – С. 72 – 75.*
11. *Толмачев Л.В. Выбор расположения гидроузлов в зависимости от рельефа местности // Гидротехническое строительство. – 1991. – № 10. – С. 32 – 35.*
12. *Кучук Г.А. Формалізація предметної області багатовимірних баз даних // Системи обробки інформації. – Х. : ХФВ: «Транспорт України», 2001. – Вип. 1(11). – С. 110 - 114.*
13. *Ерешко Ф.И. Приложение методов исследования операций к решению региональных экономических задач // Труды XI-й Международной Байкальской школы-семинара: Пленарные доклады. – Иркутск: Иркутский госуниверситет. – 1998. – С. 125 – 139.*
14. *Теория систем в приложении к проблемам защиты окружающей среды / А. Колорин, А. Лепски и др.; Под ред. С. Ринальди; Пер. с итал. В.Е. Краскевича. – К.: Вища школа, 1981. – 263 с.*
15. *Мазманишвили А.С., Рафалович О.Я., Слипченко Н.И. Оперативная маршрутизация транспортных средств на основе синтеза информатизационных карт спутниковой связи // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 26 – 28.*
16. *Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. – М.: Мир, 1989. – 478 с.*
17. *Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии: геометрические главы. – М.: Наука, – 1977. – 488 с.*
18. *Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.*

Поступила 28.02.2003

БЕЛОУС Наталья Валентиновна, *канд. техн. наук, доцент, доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов – методы оптимизации, искусственный интеллект, дискретная математика.*

СМЕЛЯКОВА Анастасия Сергеевна, *студентка Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов – вычислительная геометрия.*