

## КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАЗМЕ И ПОТОКИ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

д.ф.-м.н. В.И. Карась, к.ф.-м.н. В.Е. Новиков,  
к.т.н. Г.Ф. Коняхин, к.т.н. А.М. Сотников

*Присутствие источников и стоков приводит к формированию неравновесного состояния в пространственно однородных системах, обладающего степенными асимптотиками, соответствующими постоянному потоку в фазовом пространстве. В работе разрабатывается неэкстенсивная термодинамика неравновесной твердотельной плазмы с источниками и стоками и приведена зависимость потока в фазовом пространстве от параметра неэкстенсивности термодинамики Тсаллиса. Приведена гиперболическая система уравнений для функции распределения и потока в фазовом пространстве.*

**Введение.** В системах с мощными источниками частиц и излучений особенно важным является изучение стационарных распределений, которые служат аналогами равновесных распределений. Присутствие источников и стоков может вести к формированию неравновесного состояния в пространственно однородных системах, обладающего степенными асимптотиками и квазипостоянными потоками в фазовом пространстве. В таких системах приближение локального равновесия неприменимо. В работе изучены асимптотические свойства неравновесных состояний и показана их связь с неэкстенсивной термодинамикой Тсаллиса, получена зависимость параметра неэкстенсивности от потока в фазовом пространстве и интенсивностей источников и стоков.

**Анализ литературы.** Квазистационарные неравновесные состояния систем частиц могут быть изучены с помощью решения кинетических уравнений, учитывающих наличие источников и стоков частиц. Существование степенных распределений частиц по энергии было показано впервые теоретически в [2], а экспериментально в [3]. В работе [2] было показано с помощью преобразований подобия, что кинетическое уравнение Больцмана для пространственно однородных систем имеет точные степенные стационарные решения. В работах также было показано с помощью прямых вычислений интеграла столкновений Больцмана и Ландау, что степенные распределения

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon)^{-s}, \quad (1)$$

где  $s$  – показатель степени;  $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$  – энергия частиц;  $v$  – скорость час-

тиц;  $A$  – константа, являются стационарными решениями кинетических уравнений, обращающими потоки частиц или энергии в фазовом пространстве в ненулевые константы. Такие состояния частиц подобны колмогоровским спектрам волн в турбулентном состоянии. Причем эти состояния зависят только от интегральных характеристик источника и стока.

В частности, к неравновесным однородным в пространстве системам, имеющим степенную компоненту, относятся электронные подсистемы полупроводников под воздействием электромагнитного поля с энергией кванта порядка запрещенной зоны [4] или электронная подсистема в металлах, находящихся под воздействием постоянных процессов ионизации при распространении альфа-частиц в веществе [3].

В степенных решениях кинетического уравнения Больцмана, полученных в работе [2], показатель степени  $s$  зависел лишь от показателя степени зависимости потенциала взаимодействия частиц от взаимного расстояния. В этой работе были также проанализированы как дисперсионные свойства плазмы со степенными распределениями электронов, так и ионизационное равновесие в таких неравновесных стационарных состояниях. В [4] было показано, что наличие двух компонент функции распределения – равновесной и неравновесной – приводит к существованию плазменных колебаний с линейной дисперсией. Наличие таких распределений и плазменных колебаний может быть существенно для многих взаимодействий в плазме полупроводника, в частности, для фонного [5] и плазмонного механизма сверхпроводимости [4].

Точные решения уравнений Больцмана для пространственно однородного газа в случае специальной модели столкновения (газ максвелловских молекул) впервые были получены в [6] и изучались в литературе очень интенсивно [7].

Физическая ценность математических моделей для интеграла столкновения в кинетических уравнениях заключается в том, что кинетические уравнения, с одной стороны, становятся более поддающимися аналитическому анализу, и, с другой стороны, сохраняют присущие полным нелинейным уравнениям существенные свойства типа законов сохранения и H-теоремы.

При исследовании неравновесных состояний электронов в полупроводниковой плазме возможны два существенно отличающихся друг от друга случая. В первом случае источники электронов сосредоточены вблизи энергии Ферми или незначительно превосходят ее, а во втором – энергии, при которых возникают неравновесные электроны в полупро-

воднике, намного превышают энергию Ферми. В первом случае существенными для электронов являются процессы рассеяния на фононах, а во втором можно учитывать только электрон-электронные столкновения в полупроводниковой плазме.

**Цель статьи** – рассмотреть кинематику электронов в полупроводниковой плазме и потоки в фазовом пространстве.

**Кинетика электронов при взаимодействии с фононами в полупроводниковой плазме.** Исследуем сначала особенности стационарных неравновесных распределений электронов в системах с источниками и стоками при взаимодействии электронов с равновесными фононами в твердотельной плазме.

Для описания кинетики электронов используем пространственно однородное нелинейное (за счет учета квантовой статистики) кинетическое уравнение с источниками и стоками [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial}{\partial v} \Pi\{f, v\} + \Psi(v). \quad (2)$$

Для изотропной среды удобно сделать замену переменной  $x = v^2/2$ ,  $F(x) = 4\pi\sqrt{2x}f(\sqrt{2x})$  (здесь и далее  $v$  – скорость частицы, нормированная на среднюю скорость частиц  $v_{0t}$  в начальном состоянии).

В этой статье мы рассматриваем важный класс источников – источники, которые локализованы в пространстве энергий  $D(x) = Q_i x_i \delta(x - x_i)$ . Стоки часто используются в форме  $-v(x)F(x)$ . Воспользовавшись этими моделями, запишем выражение, которое описывает источники и стоки в виде

$$\Psi(x) = D(x) - v(x)F(x). \quad (3)$$

Для взаимодействующих заряженных частиц (интеграл столкновений Ландау) выражение для потока в кинетическом уравнении имеет особенно простой вид

$$\Pi\{f\}, v = D(v) \frac{\partial f}{\partial v} + F(v)f(v)(1 - f(v)), \quad (4)$$

где  $D(v)$  – коэффициент диффузии для движения частиц в фазовом пространстве.

В области постоянного потока уравнение для стационарной функции преобразуется в линейное уравнение второго порядка, общее решение которого имеет следующий вид [5]:

$$y(\varepsilon) = C_1 I_v \left( \frac{\varepsilon}{2T} \right) + C_2 K_v \left( \frac{\varepsilon}{2T} \right), \quad v = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{P}{T^2}}, \quad f(\varepsilon) = -\frac{T_0}{y(\varepsilon)} \frac{dy(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (5)$$

Константы интегрирования определяются из условия шивки с рав-

новесными решениями (решениями, соответствующими нулевому потоку) в областях вне инерционного интервала.

Анализ неравновесного решения показывает, что отклонения от равновесия при ненулевых значениях потока сосредоточены в области энергий порядка энергии Ферми –  $E_F$ .

В конце эволюции по времени образуются области с квазипостоянным по энергии потоком в фазовом пространстве, а в области постоянства потока образуются квазистепенные участки на функции распределения. Области нулевого потока соответствует равновесная функция Ферми (рис. 1).

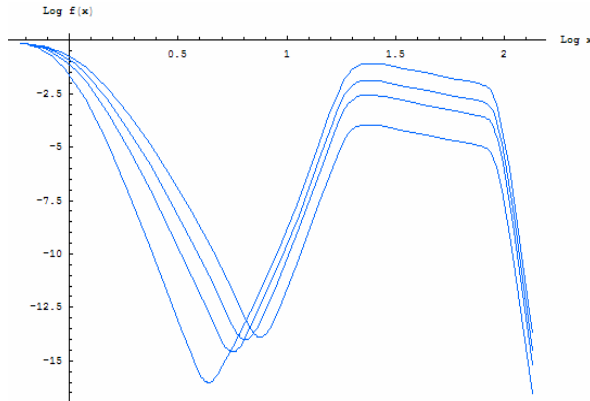


Рис. 1. Графики функций распределения в двойном логарифмическом масштабе при  $T_e = 0.1$  (кривые соответствуют  $P = -1.81, -0.81, -0.4, -0.1$ )

В неравновесной области функции распределения хорошо аппроксимируются степенными функциями распределения, при этом показатель степени практически не изменяется с ростом интенсивности источника, что хорошо видно из рис. 1, на котором изображена стационарная функция распределения в двойном логарифмическом масштабе между источником и стоком.

**Неэкстенсивная термодинамика Тсаллиса.** Как уже отмечалось выше, стационарные неравновесные распределения частиц в фазовом пространстве для пространственно однородных систем играют такую же роль, как и распределение Максвелла в термодинамике Гиббса. Наличие таких сильных отклонений от экспоненциальной зависимости должны приводить к серьезным изменениям в термодинамических свойствах систем.

Отметим, что в изучении термодинамики сильно неравновесных систем в последние 15 лет были сделаны большие достижения, также приводящие к негиббсовским распределениям (степенным) в термоди-

намике. В 1988 г. в работе [9] была предпринята попытка расширить область применения термодинамики и статистической механики на системы, в которых энтропия не обладает свойством экстенсивности.

После работы [9] было изучено большое количество систем, для которых нарушается экстенсивность энтропии и больцмановская термодинамика. Причины, по которым термодинамика Больцмана неприменима, могут быть разными. Это могут быть, например, "эффекты памяти", когда эволюция системы в данный момент времени зависит не только от параметров системы в этот конкретный момент времени, но и от ее параметров некоторое время спустя.

Эффекты памяти могут легко привести к нарушению гипотезы молекулярного хаоса. Эти эффекты означают, что отдельные частицы перед столкновением "помнят" друг друга, их движение не является полностью нескоррелированным, и необходимы уточнения термодинамических соотношений с учетом дополнительных корреляций. Формально, Тсаллис взял стандартное выражение для энтропии и функции распределения и вместо логарифма и экспоненты ввел новые функции на основе степенной зависимости:

$$\ln(x) \rightarrow \ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}; \quad (6)$$

$$\exp(x) \rightarrow \exp_q(x) = (1 + (1-q)x)^{1/(1-q)} \quad (7)$$

с неким числовым параметром  $q$ . Заметим, что при  $q$ , стремящемся к 1,  $\ln_q(x)$  и  $\exp_q(x)$  переходят в обычные логарифм и экспоненту. Новая формула для  $q$ -энтропии выглядит так:

$$S_q = -\sum_i p_i^q \ln_q(p_i) = \left(1 - \sum_i p_i^q\right) / (q-1). \quad (8)$$

Если  $q > -1$ , то  $q$ -энтропия переходит в стандартную больцмановскую энтропию.

Главное следствие такой замены:  $q$ -энтропия является уже не экстенсивной функцией. Если всю систему разбить на две независимых подсистемы  $A$  и  $B$ , то мы получим

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B). \quad (9)$$

Итак, параметр  $q$  – это мера неэкстенсивности системы. Как видно, величина  $q$  пока ничем не ограничена и может принимать любые вещественные значения, однако некоторые ограничения могут возникнуть в той или иной конкретной задаче.

В работе [10] показано, что условие максимума  $q$ -энтропии приводит к степенеподобным функциям:

$$p(\varepsilon) = \exp_q(-(\varepsilon/T)). \quad (10)$$

Выбранная функциональная форма q-энтропии достаточно произвольна и ее основной смысл состоит в моделировании неэкстенсивности.

**Особенности кинетики электронов в полупроводниковой плазме при энергиях, превышающих энергию Ферми.** При изучении релаксации электронов в области больших энергий в полупроводниковой плазме наиболее адекватной является форма кинетического уравнения в виде нелинейного уравнения Фоккер-Планка с интегралом столкновений в форме Ландау. При больших интенсивностях источников необходимо учитывать процессы релаксации потока между столкновениями. Релаксация потока приводит к необходимости переходить от стандартной формы уравнения Фоккер-Планка в виде параболического уравнения к системе уравнений гиперболического типа [11]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial}{\partial v} J\{f, v\} + \Psi(v); \quad \tau \frac{\partial J}{\partial t} + J = \Pi(v, \{f(v)\}). \quad (11)$$

Наиболее удобной для анализа является выражение для потока, приведенное к симметричному виду:

$$\Pi(v, \{f(v)\}) = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^v [f(v)P(x) - f(x)P(v)]x^2 dx; \quad P(v) = 2 \int_v^\infty f(x)x dx. \quad (12)$$

Вычислим поток (12) в пространстве скоростей для степенеподобной функции (10). Результат вычисления дает функцию

$$\begin{aligned} \Pi(v, q) = A & \left( C_{22} F_1 \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{q-1}; \frac{5}{2}; -(q-1)v^2 \right) - \right. \\ & \left. - 3 \left( 5C_1 - C_2 \exp_q(v^2) \right) {}_2F_1 \left( \frac{5}{2}, \frac{1}{q-1}; \frac{7}{2}; -(q-1)v^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где константы:

$$A = \frac{(q-1)^2 v^{\frac{q-3}{q-1}} \left( 1 + (q-1)v^2 \right)^{\frac{1+q}{1-q}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}{15\pi^3 \Gamma^2\left(\frac{5-3q}{2q-2}\right)};$$

$$C_1 = v^{\frac{2}{q-1}} + 2(q-1)v^{\frac{2q}{q-1}} + (q-1)^2 v^{2+\frac{2q}{q-1}} -$$

$$-\left(\frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1-2q}{q-1}} \left(1 + \frac{1}{(q-1)v^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} \left( (q-1)^{-\frac{q}{q-1}} + (q-1)^{-\frac{1}{q-1}} v^2 \right)^2 \Bigg);$$

$$C_2 = 2(q-1)v^{2+\frac{2q}{q-1}} \exp_q(v^2).$$

Эта функция представляет собой поверхность в пространстве  $(v, q)$ , изображенную на рис. 2.

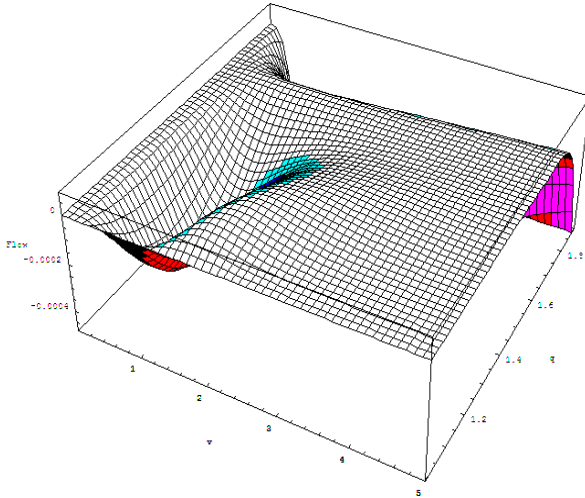


Рис. 2. Зависимость потока частиц в фазовом пространстве от скорости и параметра неэкстенсивности  $q$

Стационарным состояниям соответствуют области, в которых поток не зависит от скорости. Из рисунка видно, что существуют две такие области. Первая область – область  $q = 1$  – соответствует равновесному максвелловскому решению, а вторая область соответствует состояниям со степенными асимптотиками, полученными в работе [2].

Гиперболичность системы уравнений позволяет для численного анализа эволюции в системе эффективно использовать метод прямых. При этом зависимость функции распределения от скорости (или энергии) представляется значениями функции в дискретных точках. Для эволюции значений функции в этих точках со временем легко получить систему нелинейных уравнений в обыкновенных производных по времени.

Отметим, что формальное обобщение равновесной функции распределения Максвелла-Гиббса с помощью функции (12) на неравновесные состояния в случае квантовой статистики становится неоднозначным.

Действительно, равновесную функцию Ферми можно представить в двух эквивалентных формах

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - E_f}{T}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon - E_f}{2T}\right)}{\exp\left(\frac{\varepsilon - E_f}{2T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon - E_f}{2T}\right)}. \quad (14)$$

Заменяя экспоненту в этих представлениях на функцию (10), мы получаем два неэквивалентных обобщения на неравновесные состояния для функции Ферми. Обе эти функции при  $q \rightarrow 1$  переходят в функцию распределения Ферми, однако, функция распределения

$$f_q(\varepsilon) = \frac{\exp_q\left(-\frac{\varepsilon - E_f}{2T}\right)}{\exp_q\left(\frac{\varepsilon - E_f}{2T}\right) + \exp_q\left(-\frac{\varepsilon - E_f}{2T}\right)} \quad (15)$$

при отклонении от равновесия имеет изменения, сосредоточенные вблизи окрестности энергии Ферми, а вторая функция

$$f_q(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp_q\left(\frac{\varepsilon - E_f}{T}\right)} \quad (16)$$

с ростом неравновесности имеет степенную асимптотику при больших энергиях. Можно убедиться, что функция распределения (15) хорошо аппроксимирует функцию распределения для электронов, формирующуюся при взаимодействии с фононами, а функция распределения (16) аппроксимирует стационарные неравновесные решения кинетического уравнения типа Ландау (13) с учетом поправок, связанных со статистикой Ферми.

**Заключение.** Как правило, термодинамические соотношения для макроскопических переменных не зависят от специфического потенциала взаимодействия в системе. Мы надеемся что макроскопические характеристики стационарных неравновесных состояний обладают такими же свойствами универсальности, и точные решения кинетических уравнений с источниками и стоками имеют фундаментальное значение для интерпретации неравновесной статистической термодинамики в открытых системах, далеких от локальных состояний равновесия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Трубников Б.А. *Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 1.* – М.: Госатомиздат, 1963. – 98 с.



2. Кац А.В., Конторович В.М., Моисеев С.С., Новиков В.Е. Степенные решения кинетического уравнения Больцмана, описывающие распределение частиц с потоками по спектру // Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 21. – 13 с.
3. Батракин Е.Н., Залюбовский И.И., Карась В.И., Кононенко С.И. Исследование вторичной электронной эмиссии из тонких пленок Al, Si, Be, индуцированной пучком протонов 1 MeV // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89. – С. 1098 – 1104.
4. Новиков В.Е., Моисеев С.С., Семиноженко В.П. О возможности индуцирования акустических плазменных колебаний в неравновесных полупроводниках // Физика и техника полупроводников. – 1980. – Т. 14, вып. 2. – С. 402 – 403.
5. Карась В.И., Новиков В.Е., Моисеев С.С., Семиноженко В.П. Роль локально неравновесных по энергии распределений электронных возбуждений в повышении Tс ФНТ, 1977, 3, 69б.
6. Бобылёв А.В. О некоторых свойствах уравнений Больцмана для максвелловских молекул // ДАН СССР, 1976. – 20. – 820 с.
7. Новиков В.Е., Тур А.В., Яновский В.В. „Скейлинг” в турбулентности и кинетике. Проблемы теоретической физики. – К.: Наук. думка, 1986. – С. 164 – 173.
8. Новиков В.Е., Моисеев С.С., Тур А.В., Яновский В.В. Универсальные неравновесные распределения фотонов и динамика их образования // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86, вып. 3. – С. 920 – 928.
9. C.Tsallis, J.Stat.Phys. 52, 479 (1988).
10. Tsallis, Brazilian J.Phys. 29, 1, (1999).
11. Сотников А.М., Коняхин Г.Ф., Рыбалка Г.В., Кононенко С.И., Клепиков В.Ф., Литвиненко В.В., Новиков В.Е. Особенности электродинамических свойств фрактальных композитных материалов с  $\alpha$ -радиоактивными включениями // Системы обработки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2002. – Вип. 6(22). – С. 142 – 153.

Поступила 10.10.2003

**КАРАСЬ Виталий Игнатьевич**, доктор физ.-мат. наук, начальник лаборатории ХФТИ. Окончил физфак ХГУ в 1970 г. Область научных интересов – кинетическая теория газовой и твердотельной плазмы, взаимодействие ЭМВ с плазмой.

**НОВИКОВ Валерий Евгеньевич**, канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник НТЦ «ЭФО». В 1972 году окончил физфак ХГУ. Область научных интересов – кинетическая теория газовой и твердотельной плазмы, взаимодействие ЭМВ с плазмой.

**КОНЯХИН Григорий Фатеевич**, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры ХВУ. В 1961 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – противодействие системам обнаружения летательных аппаратов.

**СОТНИКОВ Александр Михайлович**, канд. техн. наук, профессор, нач. кафедры ХВУ. В 1980 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных интересов – противодействие системам обнаружения летательных аппаратов.