

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ АВТОГЕНЕРАТОРНОГО ВІДСЛІДКУЮЧОГО ФІЛЬТРУ

к.т.н. В.В. Рапін, к.т.н. С.В. Хуторненко
(подав д.т.н., проф. В.Д. Сахацький)

Розглянуто одноконтурний автогенератор (АГ), що синхронізовано на основному тоні періодичним полігармонійним сигналом (ППГС), що використовується у відслідковуючому фільтрі. Проведено вибір і обґрунтування методу апроксимації нелінійної характеристики (НХ) підсилюючого елементу (ПЕ), фазового зворотного зв'язку та способу одержання вкорочених рівнянь. Приведено математичну модель при поліноміальній апроксимації НХ, що враховує першу і другу гармоніки сигналу АГ.

Постановка проблеми. Використання синхронізованих АГ (САГ) в якості основних вузлів відслідковуючих фільтрів дозволяє реалізувати широку смугу синхронізації (LC або RC контур), або здійснити вузькосмугову фільтрацію сигналу (при використанні п'єзореzonатору). Процеси в АГ описуються нелінійними диференціальними рівняннями, точні методи вирішення яких відсутні. У випадку АГ відслідковуючого фільтру необхідно враховувати як мінімум дві гармонічні складові (ГС) сигналу, що ускладнює аналіз і не дозволяє одержати аналітичні залежності. Сигнал синхронізації у цьому випадку не є малим. Це не дозволяє зробити ряд спрощувальних припущень.

Огляд літератури. Наближені методи призводять до вкорочених диференціальних рівнянь, які вирішуються чисельними методами [1 – 5]. Наявність надлишковості (надмірних гармонічних складових сигналу або надвеликої точності) призводить до ускладнення моделі.

Мета статті. Метою є розробка математичної моделі одноланцюгового САГ на основному тоні ППГС, який використовується в якості елементу відслідковуючого фільтру.

1. Основне рівняння САГ. Розглянемо АГ з трансформаторним зворотнім зв'язком (рис. 1). Для апроксимації НХ ПЕ використовуємо поліном четвертого ступеню. НХ ПЕ антисиметрична відносно робочої точки,

що розташовується на перетині характеристики [3] і безінерційна:

$$i = a_0 + a_1 u_y + a_2 u_y^2 + a_3 u_y^3 + a_4 u_y^4,$$

де $u_y = u + u_0$ – керуюча напруга; u_0 – фіксоване зміщення; u – напруга ПЗЗ на вході ПЕ, вона є сигналом АГ.

Сигнал синхронізації i_c в вигляді струму подається до контуру. Тоді одноконтурний САГ описується рівнянням

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} (1 - 2\beta u - 3\gamma u^2 - 4\delta u^3) \frac{du}{dt} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} u = kR\delta_k \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{di_c}{dt}, \quad (1)$$

де $\varepsilon = \delta_k \alpha$ – малий параметр; $\tau = \omega_c t$ – безрозмірний час;

$$\alpha = (kR\alpha_0 - 1) > 0; \quad \beta = \beta_0 / \alpha'_0; \quad \gamma = \gamma_0 / \alpha'_0; \quad \delta = \delta_0 / \alpha'_0; \quad \delta_0 = a_4;$$

$$\alpha_0 = a_1 + 2a_2 u_0 + 3a_3 u_0^2 + 4a_4 u_0^3; \quad \beta_0 = a_2 + 3a_3 u_0 + 6a_4 u_0^2; \quad \gamma_0 = a_3 + 4a_4 u_0;$$

$$\alpha'_0 = -\alpha_0 + 1 / (kR);$$

$\delta_k = 1/Q$; ω_0, R, Q – резонансна частота контура АГ, його опір і добротність; k – модуль коефіцієнта ПЗЗ; ω_c – частота сигнала синхронізації.

2. Рішення основного рівняння синхронізованого автогенератора.

Хай зміна частоти сигналу синхронізації є повільною. Рішення представимо першою і другою ГС. Спрощення: амплітуда і фаза коливань АГ повільно змінюються; ПЕ – безінерційний, зміщення фіксоване, входний і вихідний опори ПЕ незначні і їх впливом нехтуємо; коефіцієнт ПЗЗ – дійсна величина, добротність контуру мала, коливання АГ і сигнал синхронізації – ППГС. Для вирішення (1) використовуємо метод розділення частот [6].

Застосуємо до (1) ітераційну процедуру. В нульовому наближенні коливання гармонічні: $u_0 = A_0 \cos(\omega_c t + \varphi)$. Введемо аналітичний сигнал і

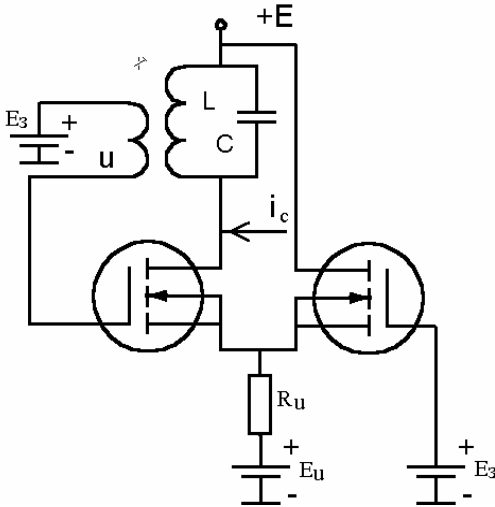


Рис. 1. Схема генератора

перейдемо до системи рівнянь першого наближення:

$$\frac{d^2 W_1}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} W_1 = \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \gamma A_1^2 \right) W_1 \right] + \delta_k kR \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{dS_{c1}}{d\tau};$$

$$\frac{d^2 W_2}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} W_2 = -\varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} (\beta + \delta A_1^2) W_1^2 \right] + \delta_k kR \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{dS_{c2}}{d\tau},$$

де W_1 – перша ГС сигналу АГ; W_2 – друга ГС АГ; S_{c1} – перша ГС сигналу синхронізації; S_{c2} – друга ГС сигналу синхронізації.

Наведені рівняння дозволяють знайти першу та другу ГС сигналу САГ з точністю до ε . Аналогічно другою ітерацією одержимо рівняння другого наближення, що описує відшукувані залежності з точністю до ε^2 :

$$\frac{d^2 W_1}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} W_1 = \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \gamma A_1^2 \right) W_1 - \left(\beta + \frac{3}{2} \delta A_1^2 \right) W_1^* W_2 - \frac{1}{2} \delta W_1^3 W_2^* \right] + \delta_k kR \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{dS_{c1}}{d\tau};$$

$$\frac{d^2 W_2}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} W_2 = \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \gamma A_1^2 \right) W_2 - \frac{1}{2} (\beta + \delta A_1^2) W_1^2 \right] + \delta_k kR \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{dS_{c2}}{d\tau},$$

де W_1^* – аналітичний сигнал, комплексно спряжений до сигналу W_1 .

Остаточна система рівнянь приймає наступний вигляд:

$$\frac{d^2 W_1}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} W_1 = \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 + \frac{3}{4} \gamma A_1^2 \right) W_1 \right] + \frac{1}{\omega_c C} \frac{dS_{c1}}{d\tau};$$

$$\frac{d^2 W_2}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} W_2 = \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \gamma A_1^2 \right) W_2 + \frac{1}{2} (\beta + \delta A_1^2) W_1^2 \right] + \frac{1}{\omega_c C} \frac{dS_{c2}}{d\tau}. \quad (2)$$

Рівняння (2) – вкорочена комплексна модель одноконтурного LC – АГ, синхронізованого ППГС.

3. Формування фазового зворотнього зв'язку. Нехай зовнішній сигнал синхронізації

$$u_c = A_{c1} \cos(\omega_c t + \varphi_{c1}) + A_{c2} \cos(2\omega_c t + \varphi_{c2}),$$

а сигнал САГ

$$u = A_1 \cos(\omega_c t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_c t + \varphi_2).$$

У відповідності з алгоритмом формування фазового ПЗЗ другого роду першого порядку зводимо сигнал АГ до квадрату і відкидаємо постій-

ну складову. Третя і четверта ГС відфільтровуються фільтром з фіксованою смугою пропускання, а члени, що залишилися, перемножуються з сигналом синхронізації. Видаляючи постійні члени і ГС вище другої, одержимо безпосередній сигнал синхронізації автогенератора:

$$u'_c = A_1^2 A_{c1} \left\{ \frac{1}{4} \cos(\omega_c t + 2\varphi_1 - \varphi_{c1}) + \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_1} \cos(2\omega_c t + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_{c1}) + \frac{1}{2} \frac{A_{c2}}{A_{c1}} \frac{A_2}{A_1} \cos(2\omega_c t - \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_{c2}) \right\};$$

$$u'_c = A'_{c1} \cos(\omega_c t + 2\varphi_1 - \varphi_{c1}) + A'_{c2} \cos(2\omega_c t + \psi_{c2}),$$

де $A'_{c1} = A_1^2 A_{c1} / 4$ – амплітуда першої гармоніки; $\psi_{c1} = 2\varphi_1 - \varphi_{c1}$ – її фаза;

за; $A'_{c2} = A_1^2 A_{c1} \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_1} \sqrt{A_{\cos}^2 + A_{\sin}^2}$ – амплітуда другої гармоніки;

$\psi_{c2} = \arctg(A_{\sin} / A_{\cos})$ – її фаза;

$$A_{\cos} = \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_{c1}) + \frac{A_{c2}}{A_{c1}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{c2});$$

$$A_{\sin} = \left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_{c1}) + \frac{A_{c2}}{A_{c1}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{c2}) \right].$$

Амплітуда першої та другої ГС сигналу синхронізації залежить від амплітуд першої і другої ГС сигналу АГ, зовнішнього сигналу синхронізації і їх фаз. Визначимо максимальне значення амплітуди цієї гармоніки.

Вводячи позначення $\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_{c1} = x$, $\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{c2} = y$, після перетворення одержимо

$$A'_{c2} = \frac{1}{2} A_1^2 A_{c1} \frac{A_2}{A_1} \sqrt{1 + \left(\frac{A_{c2}}{A_{c1}} \right)^2 + 2 \frac{A_{c2}}{A_{c1}} \cos(x - y)}.$$

Співвідношення досягає максимуму, коли $x = y$ і найбільша амплітуда другої ГС сигналу синхронізації описується виразом

$$A'_{c2(\max)} = \frac{1}{2} A_1^2 A_{c1} \frac{A_2}{A_1} \left(1 + \frac{A_{c2}}{A_{c1}} \right).$$

Найбільша відносна величина другої ГС сигналу синхронізації

$$\frac{A_{c2(\max)}}{A_{c1}} = 2 \frac{A_2}{A_1} \left(1 + \frac{A_{c2}}{A_{c1}} \right).$$

Вона прямо пропорційна відносній величині другої ГС сигналу АГ і може бути менше відносної величини однойменної ГС зовнішнього сигналу синхронізації. Для цього необхідно, щоби відносна величина другої ГС сигналу АГ була достатньо малою. Таким чином, фазова ПЗЗ другого роду може зменшувати вплив другої ГС зовнішнього сигналу синхронізації. При цьому у вихідному сигналі АГ друга ГС буде мати більш низький рівень, який визначається другою ГС АГ, що зумовлена НХ ЕП і добротністю контуру.

Математична модель автогенератора слідкуючого фільтру. Переходимо в (2) від комплексних змінних до дійсних – амплітуд і фаз першої та другої ГС сигналу:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} (y_1^3 - y_1) &= \frac{\varepsilon B}{2\alpha} \cos \theta_1; \\ \frac{d\theta_1}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} B \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{1}{y} \sin \theta_1 &= -\frac{\omega_c^2 - \omega_0^2}{2\omega_c^2}; \\ \frac{dy_2}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\omega_0}{\omega_c} y_2 (1 - 2y_1^2) &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\omega_0}{\omega_c} (\beta + \delta A_0 y_1^2) A_0 y_1^2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \frac{kR}{\alpha} \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{I_{c2}}{A_0} \cos(\psi_2 - \varphi_2); \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{kR}{\alpha} \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{I_{c2}}{A_0} \frac{1}{y_2} \sin \theta_2 &= -\frac{1}{4} \left(4 - \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} \right) - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\omega_0}{\omega_c} (\beta + \delta A_0^2 y_1^2) \times \\ &\times A_0 \frac{y_1^2}{y_2} \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{d\psi_{c2}}{d\tau}, \end{aligned}$$

де $\theta_1 = \varphi_1 - \psi_{c1}$ – зсув фази першої ГС сигналу АГ відносно першої ГС безпосереднього сигналу синхронізації; $y_1 = A_1 / A_0$ – безрозмірна амплітуда першої ГС сигналу АГ; $B = I_{c1} / I_0$; I_{c1} – амплітуда першої ГС безпосереднього сигналу синхронізації у виді струму; $I_0 = A_0 / (Rk)$; $A_0 = (4\alpha \omega_0 / (3\gamma_0))^{1/2}$ і A_1 – амплітуди першої гармоніки сигналу АГ у автономному режимі і в режимі синхронізації; $y_2 = A_2 / A_0$ – безрозмірна амплітуда першої ГС сигналу АГ; I_{c2} – амплітуда другої ГС безпосереднього сигналу синхронізації у виді струму.

Підставляючи вирази фаз першої і другої ГС безпосереднього сигналу синхронізації одержуємо математичну модель автогенератора відслідковуючого фільтру. Вказана система рівнянь допускає послідовне рішення – спочатку вирішуються перші рівняння, що описують першу ГС, а потім другі – другу ГС.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Розглянуто одно-контурний АГ – елемент відслідковуючого фільтру, який синхронізовано на основному тоні ППГС. Встановлено, що в САГ на основному тоні ППГС фазова ВЗЗ другого роду першого порядку може зменшити амплітуду другої ГС безпосереднього сигналу синхронізації. Підвищення порядку ВЗЗ приводить до подальшого зменшення амплітуди ГС.

У подальшому планується провести дослідження моделі у напрямку визначення амплітуд і фаз ГС сигналу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* – М.: ГИФМЛ, 1963. – 503 с.
2. Митропольский Ю.А. *Методы усреднения в нелинейной механике.* – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
3. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. *Теория колебаний в радиотехнике.* – М.: Наука, ГРФМЛ, 1984. – 320 с.
4. Андреев В.С. *Теория нелинейных электрических колебаний.* – М.: Связь, 1972. – 327 с.
5. Шахгильдян В.В., Бурдзейко Б.П.. *Методы исследования систем фазовой синхронизации // Proc. International Seminar. Nonlinear Circuits and Systems.* – Moscow. – 1992. – Vol. 1. – P. 171 – 179.
6. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. *Разделение частот в теории колебаний и волн.* – М.: Наука, 1983. – 320 с.

Надійшла 14.01.2005

РАПІН Володимир Васильович, канд. техн. наук, доцент кафедри автоматики і радіоелектроніки Української інженерно-педагогічної академії. У 1972 р. закінчив радіотехнічний факультет ХІІІ. Область наукових досліджень – нелінійна теорія електричних коливань і аналогова обробка сигналів.

ХУТОРНЕНКО Сергій Володимирович, канд. техн. наук, доцент кафедри автоматики і радіоелектроніки Української інженерно-педагогічної академії. У 1987 р. закінчив радіотехнічний факультет ХАІ. Область наукових досліджень – пристрої стабілізації частоти і датчики на основі п'єзокварцевих резонаторів.