УДК 538.56:519.25

ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

к.ф.-м.н. А.М. Стадник, к.ф.-м.н. А.А. Можаев, А.С. Васильев
(представил д.ф.-м.н. В.К. Иванов)

На основе метода континуальных интегралов в теории распространения волн в случайно-неоднородных средах получены в марковском приближении замкнутые уравнения для пространственно-частотных корреляционных функций волнового поля в среде с дельта-коррелированным полем флуктуаций диэлектрической проницаемости, статистика которого произвольна.

Введение. Континуальные интегралы (КИ), введенные в математику Н. Винером как метод решения задач теории диффузии и броуновского движения, в физической литературе называют также фейнмановскими – в честь Р. Фейнмана, использовавшего их для переформулировки квантовой электродинамики. Впоследствии метод КИ был успешно применен к широкому кругу задач и в настоящее время является одним из наиболее мощных методов теоретической физики [1 – 8].

Применение КИ позволяет обосновать результаты, получаемые другими методами, выяснить пределы их применяемости и наметить способ вычисления поправок: если возможно точное решение, то метод КИ дает простой способ его получения. КИ особенно удобны в тех случаях, когда стандартная теория возмущений должна быть модифицирована, так как представляют собой достаточно гибкий математический аппарат, приспособленный для такой перестройки и подсказывающий способ ее конкретной реализации.

На сегодня строгая математическая теория и корректное определение разработаны лишь для некоторых типов КИ. Математические вопросы теории КИ изложены в [9, 10]. Однако в рамках теории возмущений, где достаточно использовать КИ специального вида – гауссовы, формализм КИ является вполне строгим, и полученные с его помощью результаты не нуждаются в дополнительном обосновании.

В теории электромагнетизма метод континуальных интегралов использовался для решения некоторых задач дифракции [11 – 14]. В теории распространения волн в случайно-неоднородных средах он был впервые применен в работах [15 – 19] и получил дальнейшее развитие в атмосферной оптике – для описания слабых флуктуаций оптического излучения после прохождения через статистически однородную и изотропную турбулентную атмосферу [20 – 23].

Преимуществом метода КИ является легкость включения в рассмотрение анизотропии, регулярной рефракции, неоднородности по одной или нескольким координатам. Это и обусловило плодотворность его применения в акустике океана, где связь между пространственным и временным поведением определяется не гипотезой Тейлора о замороженных флуктуациях, а дисперсионным уравнением для внутренних волн [24, 25].

Используя метод КИ, удалось рассмотреть случай насыщенных флуктуаций, когда нормированная дисперсия интенсивности (индекс мерцаний) с увеличением длины трассы распространения или интенсивности флуктуаций среды достигает своего максимума. Были получены асимптотики высших моментов интенсивности волны, позволяющие судить о распространении вероятностей интенсивности в режиме насыщения [18 – 20].

В данной работе предпринята попытка применения метода КИ для исследования пространственно-частотных корреляций поля волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. В силу чрезвычайной сложности таких задач выражения для пространственно-частотных моментов произвольного порядка обычными методами получить не удается, и остается вывод или поиск уравнений для этих моментов в надежде, что их удастся решить хотя бы численно.

Целью данной статьи является получение замкнутых уравнений для пространственно-частотных корреляционных функций волнового поля в среде с дельта-коррелированным полем флуктуаций диэлектрической проницаемости, статистика которого произвольна, в приближении марковского случайного процесса.

1. Формулировка задачи и основные допущения. Рассмотрим скалярную величину $E(\vec{r},t)$ – одну из компонент электромагнитного поля (или давления – в задачах акустики). В предположении узкополосного источника сигнала поле можно представить в виде

$$E(\vec{r},t) = E_{\omega}(\vec{r},t)\, e^{-i\omega t},$$

где ω – частота волны, а временной масштаб изменения E_{ω} много больше ω^{-1}.

Распространение волн описывается волновым уравнением, в которое входит случайная функция координат:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\varepsilon_\omega(\vec{r},t)\right]E_\omega(\vec{r},t)=0.$$

В случае крупномасштабных (по сравнению с длиной волны) неоднородностях среды распространения одним из эффективных методов упрощения волнового уравнения является метод параболического уравнения [26, 27]. В рамках скалярного волнового уравнения Гельмгольца он эквивалентен приближению рассеяния вперед. Это приближение применимо к средам, которые медленно изменяются на масштабах порядка длины волны вдоль некоторого выделенного направления и справедливо для малых углов распространения по отношению к этому направлению.

Кроме того, большинство приближенных методов решения стохастического волнового уравнения предполагает малость флуктуаций $\Delta\varepsilon(\vec{r};k)$ [26, 28]. Это предположение, либо являясь основой метода (малых возмущений), либо позволяя решить приближенные уравнения (геометрической оптики, метода плавных возмущений) накладывает определенные ограничения на применимость этих методов и не позволяет рассмотрение сильных флуктуаций волнового поля.

Другой малый параметр – отношение продольного (вдоль направления распространения волн) радиуса корреляции флуктуаций $\Delta\varepsilon(\vec{r};k)$ к характерному продольному масштабу флуктуаций поля волны – использует приближение марковского процесса. Дельта-коррелированность поля $\Delta\varepsilon(\vec{r};k)$ по продольной координате позволяет исходя из параболического уравнения для комплексной амплитуды волн $U(\vec{r})$, но не решая его, получить замкнутые уравнения для моментов $U(\vec{r})$ без предположения о малости флуктуаций амплитуды волны. Поэтому считается, что марковское приближение описывает и сильные флуктуации волнового поля, по крайней мере, тогда, когда можно пренебречь рассеянием назад.

2. Метод континуальных интегралов для решения параболического волнового уравнения. Поскольку поле в среде с крупномасштабными неоднородностями сосредоточено в узком конусе направлений, то его удобно представить в виде возмущенной плоской волны: $E_\omega(\vec{r},t)=U_\omega(\vec{r},t)\exp(ikz)$. При этом комплексная амплитуда волны, распределяющейся вдоль положительного направления оси z в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_\omega(\vec{r})=1+\Delta\varepsilon(\vec{r};k)$, описывается параболическим уравнением

$$\left[\frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2k^2}\Delta_\perp+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon(\vec{\rho},z;k)\right]U(\vec{\rho},z;k)=0, \tag{1}$$

где $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам $\vec{\rho}=(x,y)$. Здесь и ниже для упрощения записи опущена плавная зависимость соответствующих величин от времени (при необходимости ее можно восстановить в конце расчетов). Решение уравнения (1) для произвольных начальных условий записывается как

$$U(\vec{\rho},z;k)=\int d\vec{\rho}_0 G(\vec{\rho},z|\vec{\rho}_0,z_0;k)\,U(\vec{\rho}_0,z_0;k), \tag{2}$$

где функция Грина $G(\vec{\rho},z|\vec{\rho}_0,z_0;k)$ удовлетворяет по первой паре аргументов тому же уравнению (1), но с начальным условием $G(\vec{\rho},z|\vec{\rho}_0,z_0;k)=\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)$. Уравнение (1) после очевидных преобразований ($k^{-1}=\hbar$ – постоянная Планка, $\Delta\varepsilon(\vec{r})=-2V(\vec{r})$) совпадает с двумерным уравнением Шредингера для частицы единичной массы, во внешнем поле $V(\vec{r})$, что позволяет сразу записать выражение для $G(\vec{\rho},z|\vec{\rho}_0,z_0;k)$ в виде КИ [1]:

$$G(\vec{\rho},z|\vec{\rho}_0,z_0;k)=\frac{1}{N}\int \exp\left\{\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z}dz'\left[\dot{\vec{\eta}}^2(z')+\Delta\varepsilon(\vec{\eta}(z'),z';k)\right]\right\}\prod_{z'}d\vec{\eta}(z'). \tag{3}$$

Интегрирование в (3) производится по всем двумерным траекториям, удовлетворяющим граничным условиям $\vec{\eta}(z_0)=\vec{\rho}_0$, $\vec{\eta}(z)=\vec{\rho}$, а нормировочный множитель N находится из условия

$$\frac{1}{N}\int \exp\left\{\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z}dz'\dot{\vec{\eta}}^2(z')\right\}\prod_{z'}d\vec{\eta}(z')=G_0(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0,z-z_0;k), \tag{4}$$

где $G_0(\vec{\rho},z;k)=\dfrac{k}{2\pi iz}\exp\left(\dfrac{ik}{2z}\vec{\rho}^2\right)$ – функция Грина уравнения (1) для однородной среды (при $\Delta\varepsilon(\vec{r};k)=0$). Для нашей задачи множитель N можно включить в обозначение меры:

$$\frac{1}{N}\prod_{z'}d\vec{\eta}(z')=D\vec{\eta}.$$

Формулу (3) можно понимать как компактную запись бесконечного интеграла

$$G\left(\vec{\rho}, z\middle|\vec{\rho}_o, z_o; k\right) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{k}{2\pi i \Delta\zeta_j}\, d\vec{\eta}_j \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{ik}{2} \sum_{j=1}^{N} \Delta\zeta_j \left[\left(\frac{\vec{\eta}_j - \vec{\eta}_{j-1}}{\Delta\zeta_j} \right) + \Delta\varepsilon\left(\vec{\eta}_{j-1}, \zeta_{j-1}; k\right) \right] \right\},$$

где $\Delta\zeta_j = \zeta_j - \zeta_{j-1}, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ – разбиение интервала $[z_o, z]$ таким образом, что $z_o < \zeta_o < \zeta_1 < \ldots < \zeta_n \equiv z$, и $\vec{\eta}_o \equiv \vec{\rho}_o$, $\vec{\eta}_N \equiv \vec{\rho}$.

Поскольку будут рассматриваться пространственно-частотные корреляционные функции, то в (1) – (4) явно выделена зависимость всех величин от частоты посредством $k = k(\omega)$. В дальнейшем мы ограничимся достаточно общим случаем, когда зависимость $\Delta\varepsilon(\vec{r}; k)$ от k является мультипликативной: $\Delta\varepsilon(\vec{r}; k) = \mu(k)\, \delta\varepsilon(\vec{r})$.

В силу линейности соотношения (2) моменты комплексной амплитуды $U(\vec{r}; k)$ очевидным образом выражаются через моменты функций Грина, удовлетворяя тем же уравнениям, но другим начальным условиям. Поэтому будем рассматривать моменты

$$\Gamma_{n,m}\left(\left\{\vec{\rho}_p, k_p\right\}, \left\{\vec{\rho}\,'_s, k'_s\right\}, z\right) = \left\langle G_1 \ldots G_n\, G_1'^{*} \ldots G_m'^{*} \right\rangle, \tag{5}$$

где $G_p\left(\vec{\rho}_p, z\middle|\vec{\rho}_{op}, z_o; k\right)$, $p = 1, \ldots, n$, $G_s'^{*}\left(\vec{\rho}_s, z\middle|\vec{\rho}_{os}, z_o; k'_s\right)$, $s = 1, \ldots, m$, а угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций флуктуаций $\Delta\varepsilon(\vec{r}; k)$. Начальным условием для моментов (5) является

$$\Gamma_{n,m}\left(\left\{\vec{\rho}_p, k_p\right\}, \left\{\vec{\rho}\,'_s, k'_s\right\}, z_o\right) = \prod_{p=1}^{n} \delta\left(\vec{\rho}_p - \vec{\rho}_{op}\right) \prod_{s=1}^{m} \delta\left(\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_{os}\right).$$

3. Среднее поле точечного источника. Начиная с простейшего из моментов (5), усредним выражение (3) для $G\left(\vec{\rho}, z\middle|\vec{\rho}_o, z_o; k\right)$ – по существу, поля точечного источника, расположенного в точке $\left(\vec{\rho}_o, z_o\right)$, и получим

$$\Gamma_{1,o}\left(\vec{\rho}, k, z\right) = \int \exp\left\{ \frac{ik}{2} \int_{z_o}^{z} dz'\, \dot{\vec{\eta}}^2(z') \right\} \Phi\left[\lambda_{1,o}\right] D\vec{\eta}, \tag{6}$$

где

$$\lambda_{1,o}\left(\vec{\rho}, z\right) = \frac{1}{2} k\mu(k)\, h\left(z' - z_o\right) h\left(z - z'\right) \delta\left(\vec{\rho}\,' - \vec{\eta}(z')\right); \tag{7}$$

$h(z)$ – ступенчатая функция Хевисайда, а $\Phi[\lambda] = \left\langle \exp\left[i\int d\vec{r}\ \delta\varepsilon(\vec{r})\,\lambda(\vec{r})\right]\right\rangle$ – характеристический функционал случайного поля $\delta\varepsilon(\vec{r})$.

Как известно [26, 28], и как видно из (6), для того, чтобы для уравнения моментов $\Gamma_{n,m}$ были замкнутыми, поле $\delta\varepsilon(\vec{r})$ должно быть дельта-коррелированным по z, т.е. его кумулянты иметь вид дельта-функций по всем z-аргументам:

$$K_n(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = K_n(\vec{\rho}_1, \ldots, \vec{\rho}_n, z_1)\,\delta(z_1 - z_2)\ldots\delta(z_{n-1} - z_n).$$

Характеристический функционал представляется тогда в виде

$$\Phi[\lambda] = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dz'\dot{\theta}_z, [\lambda]\right\}, \tag{8}$$

где

$$\dot{\theta}_{z'}[\lambda] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d\vec{\rho}_1 \ldots d\vec{\rho}\ K_n(\vec{\rho}_1, \ldots, \vec{\rho}_n, z_1)\,\lambda(\vec{\rho}_1, z')\ldots\lambda(\vec{\rho}_n, z'). \tag{9}$$

Как видно из (9), $\dot{\theta}_{z'}[\lambda]$ является на самом деле функционалом от $\lambda(\vec{\rho}', z')$ как функции только $\vec{\rho}'$, а зависимость от z' входит параметрически (такое обозначение введено для удобства сравнения с результатами [28, 29]).

Подставляя (7) в (9), а затем в (6), получаем

$$\Gamma_{1,o}(\vec{\rho}, k, z) = \int \exp\left\{\frac{ik}{2}\int_{z_o}^{z} dz'\left[\dot{\vec{\eta}}^2(z') + \delta\varepsilon_{эф}(\vec{\eta}(z'), z', k)\right]\right\} D\vec{\eta}, \tag{10}$$

где

$$\delta\varepsilon_{эф}(\vec{\rho}, z) = \frac{2}{ik}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{ik}{2}\,\mu(k)\right]^n K_n(\vec{\rho}_1, \ldots, \vec{\rho}_n, z). \tag{11}$$

Сравнивая (10) с (3), легко видеть, что $\Gamma_{1,o}(\vec{\rho}, k, z)$ удовлетворяет уравнению (1), в котором $\delta\varepsilon(\vec{r}, z)$ заменено на $\delta\varepsilon_{эф}(\vec{\rho}, z)$. Если флуктуации диэлектрической проницаемости являются однородными, то $K_n(\vec{\rho}_1, \ldots, \vec{\rho}_n, z_1) = K_n$ и выражение (11) уже также не зависит от координат:

$$\delta\varepsilon_{эф} = \frac{2}{ik}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{ik}{2}\,\mu(k)\right]^n K_n = \text{const}. \tag{12}$$

Тогда соответствующий множитель в (10) можно вынести из-под знака континуального интеграла и, с учетом (4), получить

$$\Gamma_{1,o}\left(\vec{\rho},k,z\right)=G_o\left(\vec{\rho}-\vec{\rho}_o\middle|z-z_o;k\right)\exp\left[\frac{ik}{2}\,\delta\varepsilon_{эф}\left(z-z_o\right)\right]. \qquad (13)$$

Как легко показать, $\operatorname{Im}\delta\varepsilon_{эф}>0$ и, следовательно, формула (13) описывает экспоненциальное затухание когерентной составляющей поля волны при распространении в случайно-неоднородной среде.

Выражение (13) можно получить и непосредственно, решая уравнение для $\Gamma_{1,o}\left(\vec{\rho},k,z\right)$ вида (11), в котором $\delta\varepsilon_{эф}$ дается формулой (12).

4. Уравнения для корреляционных функций $\Gamma_{1,1}$**.** Для получения $\Gamma_{1,1}$ усредним произведение двух функций Грина $G_1G_2^*$, для каждой из которых используем выражение в виде КИ (3). В результате получим

$$\Gamma_{1,1}\left(\vec{\rho}_1,k_1,\vec{\rho}_2,k_2,z\right)=\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int\limits_{z_o}^{z}dz'\left[k_1\dot{\vec{\eta}}_1^2(z')-k_2\dot{\vec{\eta}}_2^2(z')\right]\right\}\Phi\left[\lambda_{1,1}\right]D\vec{\eta}_1\,D\vec{\eta}_2, \qquad (14)$$

где интегрирование ведется по двумерным траекториям с граничными условиями $\vec{\eta}_1(z_o)=\vec{\rho}_{o1}$, $\vec{\eta}_2(z_o)=\vec{\rho}_{o2}$, $\vec{\eta}_1(z)=\vec{\rho}_1$, $\vec{\eta}_2(z)=\vec{\rho}_2$, а функция

$$\begin{gathered}\lambda_{1,1}\left(\vec{\rho}',z'\right)=\frac{1}{2}h\left(z'-z_o\right)h\left(z-z'\right)\times\\ \times\left[k_1\mu\left(k_1\right)\delta\left(\vec{\rho}'-\vec{\eta}_1(z')\right)-k_2\mu\left(k_2\right)\delta\left(\vec{\rho}'-\vec{\eta}_2(z')\right)\right].\end{gathered} \qquad (15)$$

После подстановки (15) в (9) имеем

$$\Phi\left[\lambda_{1,1}\right]=\exp\left\{\int\limits_{z_o}^{z}dz'\dot{\theta}_{z'}\left[\frac{1}{2}k_1\mu\left(k_1\right)\delta\left(\vec{\rho}'-\vec{\eta}_1(z')\right)-\frac{1}{2}k_2\mu\left(k_2\right)\delta\left(\vec{\rho}'-\vec{\eta}_2(z')\right)\right]\right\}. \qquad (16)$$

Выражение (14) с учетом (16) дает окончательный результат для $\Gamma_{1,1}$ в форме КИ, по виду которого сразу выписывается уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{k_1}\Delta_{\perp 1}-\frac{1}{k_2}\Delta_{\perp 2}\right)-Q\left(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,z;k_1,k_2\right)\right]\Gamma_{1,1}\left(\vec{\rho}_1,k_1,\vec{\rho}_2,k_2,z\right)=0, \qquad (17)$$

где $\quad Q\left(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,z;k_1,k_2\right)=\dot{\theta}_z\left[\frac{k_1}{2}\mu\left(k_1\right)\delta\left(\vec{\rho}-\vec{\rho}_1\right)-\frac{k_1}{2}\mu\left(k_2\right)\delta\left(\vec{\rho}-\vec{\rho}_2\right)\right]$; $\Delta_{\perp 1}$, $\Delta_{\perp 2}$ – поперечный лапласиан по координатам $\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2$.

5. Уравнения для корреляционных функций произвольного порядка. Без существенных усложнений можно получить и уравнение для моментов произвольного порядка (5). Усредняя произведение

$G_1 \dots G_n\, G_1'^* \dots G_m'^*$ и снова используя для каждого из сомножителей представление в виде КИ (3), получим

$$\Gamma_{n,m} = \int \exp\left\{ \frac{i}{2} \int_{z_o}^{z} dz' \left[\sum_{p=1}^{n} k_p \dot{\vec{\eta}}_p^2(z') - \sum_{s=1}^{m} k_s' \dot{\vec{\eta}}_s'^2(z') \right] \right\} \Phi\left[\lambda_{n,m}\right] D\vec{\eta}\, D\vec{\eta}', \qquad (18)$$

где

$$\lambda_{n,m}(\vec{\rho}', z') = \frac{1}{2} h(z' - z_o)\, h(z - z') \times$$
$$\times \left[\sum_{p=1}^{n} k_p \mu(k_p)\, \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_p(z')) - \sum_{s=1}^{m} k_s' \mu(k_s')\, \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_s(z')) \right], \qquad (19)$$

$$D\vec{\eta} = D\vec{\eta}_1 \dots D\vec{\eta}_n, \quad D\vec{\eta}' = D\vec{\eta}_1' \dots D\vec{\eta}_m',$$

а интегрирование производится по всем двумерным траекториям со следующими граничными условиями:

$$\vec{\eta}_p(z_o) = \vec{\rho}_{op}, \quad \vec{\eta}_p(z) = \vec{\rho}_p, \quad p = 1, \dots, n;,$$

$$\vec{\eta}_s'(z_o) = \vec{\rho}_{os}', \quad \vec{\eta}_s'(z) = \vec{\rho}_s', \quad s = 1, \dots, m.$$

Подставляя (19) в (8), получим

$$\Phi\left[\lambda_{n,m}\right] =$$
$$= \exp\left\{ \int_{z_o}^{z} dz' \dot{Q}_{z'} \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} k_p \mu(k_p) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_p(z')) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} k_s' \mu(k_s') \delta(\vec{\rho}' - \vec{\eta}_s'(z')) \right] \right\}. \qquad (20)$$

Формула (18) с учетом (20) дает выражение для $\Gamma_{n,m}$ в форме КИ, по виду которого можно сразу записать соответствующее уравнение:

$$\frac{\partial \Gamma_{n,m}}{\partial z} = \frac{i}{2} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{k_p} \Delta_{\perp p} - \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{k_s'} \Delta_{\perp s}' \right) \Gamma_{n,m} +$$
$$+ \dot{Q}_{z'} \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} k_p \mu(k_p) \delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_p) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} k_s' \mu(k_s') \delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_s') \right] \Gamma_{n,m}. \qquad (21)$$

6. Частные случаи. Полагая в (21) $k_1 = \dots = k_n = k_1' = \dots = k_s' = k$, придем к уравнениям для пространственных корреляционных функций [29]. В частном случае гауссова случайного поля $\delta\varepsilon(\vec{r})$ уравнения (21) ранее были получены в [31,32].

Уравнения (21) очень сложны и, в отличие от случая пространственных корреляционных функций, аналитически неразрешимы уже начиная со случая $n = m = 1$ (17).

Для статистически однородного по поперечным координатам поля $\delta\varepsilon(\vec{r})$, когда $Q(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,z;k_1,k_2)=Q(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2,z;k_1,k_2)$, функцию $\Gamma_{1,1}$ можно только факторизовать. Для этого в континуальном интеграле (14) сделаем замену переменных $\vec{\eta}=\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2$, $\vec{\xi}=\dfrac{k_1\vec{\eta}_1-k_2\vec{\eta}_2}{k_1-k_2}$. Теперь переменные интегрирования в (14) разделяются:

$$\Gamma_{1,1}(\vec{\rho}_1,k_1,\vec{\rho}_2,k_2,z)=\int\exp\left\{\frac{i(k_1-k_2)}{2}\int\limits_{z_o}^{z}dz'\dot{\vec{\xi}}^2(z')\right\}d\vec{\xi}\times$$
$$\times\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int\limits_{z_o}^{z}dz'\left[\frac{k_1k_2}{(k_1-k_2)}\dot{\vec{\eta}}^2(z')-\frac{2}{i}Q(\vec{\eta}(z')),z';k_1,k_2\right]\right\}D\vec{\eta}, \qquad (22)$$

где траектории $\vec{\eta}(z')$ и $\vec{\xi}(z')$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\vec{\eta}(z_o)=\vec{\rho}_{o1}-\vec{\rho}_{o2};\ \vec{\eta}(z)=\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2;$$
$$\vec{\xi}(z_o)=\frac{k_1\vec{\rho}_{o1}-k_2\vec{\rho}_{o2}}{k_1-k_2};\ \ \vec{\xi}(z)=\frac{k_1\vec{\rho}_1-k_2\vec{\rho}_2}{k_1-k_2}.$$

С учетом (4) выражение (22) можно переписать следующим образом:

$$\Gamma_{1,1}(\vec{\rho}_1,k_1,\vec{\rho}_2,k_2;z)=$$
$$=G_o\left(\frac{k_1(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_{o1})-k_2(\vec{\rho}_2-\vec{\rho}_{o2})}{k_1-k_2},z-z_o,k_1-k_2\right)f(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2,z;k_1,k_2),$$

где функция $f(\vec{\rho},z;k_1,k_2)$ удовлетворяет следующим уравнению и начальному условию

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{k_1}-\dfrac{1}{k_2}\right)\Delta_\perp-Q(\vec{\rho},z;k_1,k_2)\right]f(\vec{\rho},z;k_1,k_2)=0;\\ f\Big|_{z=z_o}=\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}_{o1}+\vec{\rho}_{o2}).\end{cases}$$

7. Обсуждение. Уравнения для моментов можно получить и другим, несколько более громоздким путем – преобразуя в интегро-дифференциальные и усредняя соответствующие стохастические уравнения, используя затем условие дельта-коррелированности для расцепления возникающих средних и, наконец, переходя обратно к дифференциальной форме записи. Даже последний шаг для пространственных корреляционных моментов явился в свое время нетривиальной задачей.

Кроме того, при традиционном подходе использование обобщений формулы Фуруцу–Новикова вносит дополнительные трудности, суть которых в следующем. В физических задачах, описываемых системой дифференциальных уравнений первого порядка по выделенной (будем называть ее временной) переменной t с начальными условиями t = 0, статистические свойства решения в момент t определяются статистическими характеристиками случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \le \tau \le t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t,\lambda] = \left\langle \exp\left\{ i\int_0^t d\tau\, \lambda(\tau)\, z(T) \right\} \right\rangle .$$

В этом случае рассчитанные по формуле Фуруцу-Новикова средние $\langle z(t')\, R[z] \rangle$ ($R[z]$ – некий функционал от $z(T)$) претерпевают разрыв в точке $t' = t$, обусловленный некоммутативностью операций предельного перехода $t' \to t$ и разложения в функциональный ряд Тейлора.

Сложность и трудность решения уравнений для моментов возрастает с ростом их порядка: если уравнения даже для пространственных функций когерентности первого $\Gamma_{1,0}$ и второго $\Gamma_{1,1}$ порядков решаются в общем виде, то аналитическое решение уравнения для более высоких моментов получить уже не удается.

Использование КИ позволяет просто записывать как решения уравнений любого порядка (хотя конечно запись решений в виде КИ является перенесением трудностей из одной области – решения уравнений в частных производных в другую, т.к. точно вычисляются КИ лишь специального вида – гауссовы), так и выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями, избегая при этом введения лишних параметров.

Так, например, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности $\Gamma_{2,2}$, с помощью которого затем найти средний квадрат интенсивности $\left\langle I^2(\vec{\rho}, z) \right\rangle$. Однако, как уже указывалось, аналитически соответствующее уравнение не решается и содержит много излишних параметров, в то время как представление $\left\langle I^2(\vec{\rho}, z) \right\rangle$ в виде КИ этих параметров не содержит. Поэтому такая запись полезна для изучения асимптотических характеристик распределения вероятностей интенсивности.

Кроме того, существует ряд задач (например, об отражении волны от препятствий в случайно-неоднородной среде [28]), в которых, по-видимому, только функциональная запись решения позволяет получить ответ.

Как известно, вне рамок марковского приближения, из уравнения (1) удается получить лишь цепочку связанных уравнений для статистических моментов поля $U(\vec{r})$, в уравнения для низших моментов обязательно входят моменты более высоких порядков. Трудность решения этой цепочки уравнений связана с трудностью вычисления КИ общего вида.

Обычно для расцепления цепочки и получения замкнутых уравнений для моментов данного порядка принимаются определенные статистические гипотезы о решении. При формулировке задачи в терминалах КИ такие статистические гипотезы проявляются как некоторые приближения для подынтегрального выражения, что позволяет проследить за характером приближений и определить пределы их применимости.

Заключение. Таким образом, применение КИ сводит процесс вывода уравнений пространственно-временной корреляции к простому алгоритму: сначала получают само решение в форме КИ, а затем прямо по его виду записывают и уравнение. Разработка как приближенных аналитических (типа ВКБ-приближения), так и численных [33 – 37] методов вычисления КИ делает их дальнейшее применение весьма привлекательным.

Авторы выражают признательность д.ф.-м.н. Виктору Кузьмичу Иванову за постоянное внимание и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир, 1968. – 382 с.*
2. *Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. – Л.: ЛГУ, 1976. – 294 с.*
3. *Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. – К.: Наук. думка, 1987. – 224 с.*
4. *Roepstor G. Path Integral Approach to Quantum Physics, Springer, Heidelberg, 1996. – 220 p.*
5. *Functional Integration: Basics and Applications, C. DeWitt-Morette (Ed.), Plenum Press, New York, 1997.*
6. *Grosche G., Steiner F. Handbook of Feynman Path Integrals. – Springer, Berlin, 1998. – 422 p.*
7. *Chaichian M., Demichev A. Path Integrals in Physics. Vol. 1. – IOP Publishing, London, 2001. – 352 p.*

8. *Kleinert H. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets, – World Scientific Publishing Co., Singapore, 2004. – 1300 p.*
9. *LaChapelle J. Path integral solution of linear second order partial differential equations I: the general construction // Ann. Phys. – 2004. – 314. – P. 362 – 395.*
10. *LaChapelle J. Path integral solution of linear second order partial differential equations II: elliptic, parabolic, and hyperbolic cases // Ann. Phys. – 2004. – 314. – P. 396 – 424.*
11. *Eve J. The use of path integrals in guided wave theory // Proc. Roy. Soc. London. – 1976. – V. 347, pt. A. – P. 405 – 417.*
12. *Татарский В. Н. Представление решений некоторых дифракционных задач в форме гауссовых континуальных интегралов // Докл. АН СССР. – 1978. – 241, № 2. – С. 333 – 336.*
13. *Constantinou J. Path-integral analysis of tapered, graded-index waveguides // J. Opt. Soc. Amer. A. – Aug. 1991. – V. 8. – P. 1240 – 1244.*
14. *Nevels R.D. Miller J.A. Miller R.E. A path integral time-domain method for electromagnetic scattering // IEEE Trans. Antennas Propagat. – Apr. 2000. – V. 48. – P. 565 – 573.*
15. *Кляцкин В.И., Татарский В.И. О приближении параболического уравнения в задачах распространения волн в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. – 1970. – 58, №2. – С. 624 – 634.*
16. *Chow P.L. Application of function space integrals to problem on wave propagation in random media // J. Math. Phys. – 1972. – 13, № 8 . – P. 1224 – 1236.*
17. *Chow P.L. A functional phase space integral method and application to the laser bean propagation in random media // J. Statist. Phys. – 1975. – 12, № 2. – P. 93 – 109.*
18. *Dashen R. Path integrals for waves in random media // J. Math. Phys. – 1979. – 20, № 5. – P. 894 – 920.*
19. *Заворотный В.У., Кляцкин В.И., Татарский В.И. Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах // ЖЭТФ. – 1977. – 73, № 2. – С. 481 – 497.*
20. *Tatarskii V.I., Zavorotnyi V.U. Strong fluctuations in light propagation in a randomly inhomogeneous medium // Progr. Opt. – 1980. – 18. – P. 204 – 256.*
21. *Besieris J. Wave-kinetic method, phase-space path integrals, and stochastic wave propagation // J. Opt. Soc. Amer. A. – Dec. 1985. – V. 2. – P. 2092 – 2099.*
22. *Yeh K.C., Lin K.H., Wang Y. Effect of irregular terrain on waves – a stochastic approach // IEEE Trans. Antennas Propagat. – Feb. 2001. – V. 49. – P. 250 – 259.*
23. *Булдаков В.М. Применение континуальных интегралов для исследования распространения лазерного излучения в случайно-неоднородных средах // Оптика атмосферы и океана. – 1991. – 4, № 6. – С. 599.*
24. *Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. – М.: Мир, 1982. – 329 с.*
25. *Флатте С.М. Распространение волн в случайно-неоднородных средах: акустика океана // ТИИЭР. – 1983. – 71, № 11. – С. 45 – 78.*

26. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.П. Случайные поля. – М.: Наука, 1978. – 464 с.*
27. *Levy M. Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. - London: IEE, 2000. – 348 p.*
28. *Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.*
29. *Кляцкин В.И. К стохастической теории распространения света в среде со случайными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. – 1975. – 18, № 1. – С. 63 – 68.*
30. *Сабесфельд К.К., Татарский В. И. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов // Докл. АН СССР. – 1978. – 243, № 4. – С. 905 – 908.*
31. *Ерухимов Л.М., Зарницына И.Г., Кирш П.И. // Изв. Вузов. Радиофизика. – 1973. – 16, № 4. – С. 573.*
32. *Lee L.C. Wave propagation in a random medium: A complete set of the moment equations with different wavenumbers. – J. Math. Phys. – 1974. – 15, № 9. – P. 1431 – 1435.*
33. *Doll J.D., Coalson R.D., Freeman D.L. Fourier Path-Integral Monte Carlo Methods: Partial Averaging // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 55. – P. 1 – 15.*
34. *Filinov V.S. Calculation of the Feynman integrals by means of the Monte Carlo method // Nucl. Phys. B. – 1986. – V. 271. – P. 717 – 725.*
35. *Bond S.D., Laird B.B., Leimkuhler B.J. On the approximation of Feynman-Kac path integrals // J. Comp. Phys. – 2003. – V. 185. – P. 472 – 483.*
36. *Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.*
37. *Егоров А.Д., Соболевский А.Ч., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.*

Поступила 16.12.2004

***СТАДНИК Александр Михайлович**, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник Института радиофизики и электроники НАН Украины. В 1971 году окончил физфак ХГУ. Область научных исследований – распространение волн в случайно-неоднородных средах, математические методы оптимальной обработки сигналов, дистанционное зондирование Земли.*

***МОЖАЕВ Александр Александрович,** канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник ХУ ВС. Область научных исследований – нелинейное взаимодействие радиоволн в различных средах, управление процессами в информационных системах.*

***ВАСИЛЬЕВ Александр Сергеевич**, инженер ИРЭ НАНУ. В 2001 году окончил ХНУ. Область научных исследований – математическое моделирование, дистанционное зондирование Земли.*