

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ

к.т.н. В.Б. Кононов

(представил д.ф.-м., проф. А.А. Александрова)

В статье рассмотрен алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметров распределения сил и средств оперирующей стороны.

Постановка задачи. При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом из поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 7]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и предложены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решение задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего сум-

марного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. В [6] ставится задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критериям максимума и минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях полной и неполной определённости и постоянных и переменных параметрах распределения сил и средств стороны А. В [7] рассматривается алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А. Однако в этих работах не рассматривался алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Целью статьи является разработка алгоритма решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Описание алгоритма. Математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, описанные в статьях [1 – 5], предполагают, что оперирующая сторона А владеет информацией о стратегии, которой будет придерживаться сторона В.

Рассмотрим задачу оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, в которой сторона А выбирает свои управляющие параметры $\alpha(t) = \left\| \alpha_{ji}(t) \right\|_{n,m}$ так, чтобы средневзвешенное количество основных сил стороны В было минимальным при известной стратегии распределения сил и средств стороны В. В данной задаче зависимость матрицы управляющих параметров $\alpha(t)$ от времени позволяет учитывать маневр сил и средств, т.е. учитывать реально возникающую необходимость перенацеливания сил и средств оперирующей стороны в зависимости от

ситуаций, складывающихся в ходе ведения конфликтной ситуации.

Построим алгоритм решения данной задачи, математическая модель которой имеет вид:

$$\min_{\{\alpha(t)\}} \sum_{j=1}^n w_j y_j(T) = \min_{\{\alpha(t)\}} J(\alpha(t)); \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_{ji}(t) a_{ji} x_i(t), & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1, & j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(t) = 1, & i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji}(t) \geq 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (3)$$

где $x_i(t)$, $y_i(t)$ – математические ожидания количества средств сторон А и В, сохранившихся к моменту времени t ; m , n – количество типов сил и средств сторон А и В соответственно; t – текущее время конфликтной ситуации; T – заданное время конфликтной ситуации; w_j ($j = \overline{1, n}$) – коэффициент важности основного средства j -го типа стороны В; β_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – заданные параметры распределения сил и средств стороны В; α_{ji} ($j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}, 0 \leq t \leq T$) – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны А по силам и средствам стороны В; x_i^0, y_j^0 ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – количество сил и средств i -го типа стороны А и j -го типа стороны В в начале конфликтной ситуации; a_{ji}, b_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – эффективные скорострельности средств i -го типа стороны А и j -го типа стороны В соответственно.

Для решения задачи (1) – (3) необходимо задать класс функций – управлений. В прикладных задачах обычно рассматриваются непрерывные, кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие, а также измеряемые управления. В данном случае матричная функция $\|\alpha_{ji}(t)\|_{n,m}$ как функ-

ция, определяющая распределение средств по целям в каждый момент времени t , принадлежит классу кусочно-постоянных функций. Проблема состоит в том, что определить заранее точки разбиения отрезка $[0, T]$, как моменты времени перенацеливания, маневра и т.п. средств по объектам противника в ходе конфликтной ситуации в общем случае невозможно. Более того, проблематично определить даже количество таких точек в реальных условиях ведения конфликтной ситуации, когда применяемые оперирующими сторонами средства разнородны.

Очевидно, что чем больше точек переключения значений кусочно-постоянных управлений задать, тем глубже оптимум функционала (1). С другой стороны, может оказаться, что увеличение точек переключения либо незначительно улучшает оптимальное значение функционала, либо невозможно в силу показателей средств или возможностей организации конфликтной ситуации.

Суть предлагаемого алгоритма состоит в последовательном численном решении задачи (1) – (3) сначала для класса постоянных функций – управлений (алгоритм решения рассмотрен в работе [7]), затем для классов кусочно-постоянных функций – управлений соответственно с одной, двумя и т.д. точками переключения. При этом, исходя из требований ведения конфликтной ситуации и показателей средств, определяется длина Δ минимальных отрезков разбиения исходного промежутка $[0, T]$:

$$T/M \geq \Delta,$$

где M – количество отрезков разбиения. Следовательно, максимальное количество отрезков разбиения равно:

$$M_{\max} = T/\Delta.$$

Для решения предлагается использовать следующую последовательность задач Майера, в которых $\alpha_M(t) = \left\| \alpha_{M_{ji}}(t) \right\|_{n,m}$ – матричная функция кусочно-постоянных функций управлений с $(M-1)$ -й точкой переключения:

$$\left\{ \min_{\alpha_M(t)} \sum_{j=1}^n w_j y_j(T) = \left\{ \min_{\alpha_M(t)} J(\alpha_M(t)); \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j}{dt} &= - \sum_{i=1}^m \alpha_{M_{ji}}(t) a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \beta_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{Mji}(t) = 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{Mji}(t) \geq 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}; \quad 1 \leq M \leq M_{\max}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Вычисления прекращаются, если

$$\left| J[\alpha_M^*(t)] - J[\alpha_{M+1}^*(t)] \right| < \varepsilon; \quad \varepsilon > 0; \quad 1 \leq M \leq M_{\max}, \quad (7)$$

либо при $M = M_{\max}$, где $\alpha_M^*(t)$, $\alpha_{M+1}^*(t)$ – оптимальные управления для задачи (4) – (6). Применим в качестве численного метода решения задачи (4) – (6) метод условного градиента. Однако в силу зависимости матрицы управлений $\alpha_M(t)$ от времени возможность использования алгоритма, изложенного в работе [7], требует обоснования. При этом будем исходить из следующих соображений. Прежде всего покажем возможность решения рассматриваемых подзадач методом условного градиента. Экстремальная задача

$$\min_{\alpha_M(t) \in D_M} \left\langle J'[\alpha_M^k(t)], \alpha_M(t) \right\rangle, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где D_M – множество матричных функций с кусочно-постоянными зависимостями, удовлетворяющими соотношения (6) по $\alpha_{Mji}(t)$, может быть решена методом условного градиента, постольку минимум функционала $J'[\alpha_M^k(t)] = \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right\|_{n, m}$ может быть представлен таким образом:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha_M(t) \in D_M} \left\langle J'[\alpha_M^k(t)], \alpha_M(t) \right\rangle = \\ & = \min_{\alpha_M(t) \in D_M} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \alpha_{Mji}(t) \right] dt = \\ & = \min_{\alpha_M(t) \in D_M} \sum_{p=1}^M \int_{(p-1)\Gamma}^{\frac{p\Gamma}{M}} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \alpha_{Mjip} \right] dt = \\ & = \sum_{p=1}^M \left\{ \min_{\alpha_{Mjip}} \right\} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{(p-1)\Gamma}^{\frac{p\Gamma}{M}} \left[a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right] dt \alpha_{Mjip}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha_{Mji}(t) = \alpha_{Mjip} = \text{const}; \quad t \in \left[\frac{(p-1)\Gamma}{M}, \frac{p\Gamma}{M} \right]; \quad p = \overline{1, M};$$

где

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{Mjip} = 1, \quad i = \overline{1, M}; \quad \alpha_{Mjip} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad p = \overline{1, M}.$$

Соотношение (8) позволяет найти вспомогательное приближение, являющееся первым этапом предлагаемого алгоритма. Интегралы в соотношении (8) вычисляются по формуле прямоугольников:

$$I_{Mji} = \frac{\frac{p\Gamma}{M}}{\frac{(p-1)\Gamma}{M}} \int x_i(t) \eta_j(t) dt \approx \frac{\Gamma}{N_p} \sum_{s=0}^{N_p-1} x_i(t_s) \eta_j(t_s);$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad p = \overline{1, M},$$

где N_p – количество промежутков разбиения отрезка $\left[\frac{(p-1)\Gamma}{M}, \frac{p\Gamma}{M} \right]$, а значения функций $x_i(t_s), \eta_j(t_s)$ определяются в результате численного решения следующих систем дифференциальных уравнений по методу Рунге–Кутты 4-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij} b_{ij} y_j(t); \\ \frac{dy_j}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_{Mjip}^k a_{ji} x_i(t); \end{cases} \quad (10)$$

$$x_i \left[\frac{(p-1)\Gamma}{M} \right] = x_i^{\frac{(p-1)\Gamma}{M}}; \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j \left[\frac{(p-1)\Gamma}{M} \right] = y_j^{\frac{(p-1)\Gamma}{M}}; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \alpha_{Mjip}^k a_{ji} \eta_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} b_{ij} \varphi_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (11)$$

$$\varphi_i \left[\frac{p\Gamma}{M} \right] = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j \left[\frac{p\Gamma}{M} \right] = -w_j; \quad j = \overline{1, n}.$$

Интегрирование сопряжённой системы (10) проводится в обратном направлении от $t = \frac{p\Gamma}{M}$ к $t = \frac{(p-1)\Gamma}{M}$.

Минимум в (8) достигается при

$$\alpha_{M_{jip}}^{-k} = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, M}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\alpha(j_k, i, p)_M = \operatorname{argmin}_{1 \leq j \leq n} I_{M_{jip}}; \quad i = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, M}. \quad (13)$$

На втором этапе предлагаемого алгоритма определим шаг поиска.

Очередное $(k + 1)$ -е приближение определится из соотношения

$$\alpha_M^{k+1}(t) = \alpha_M^k(t) + \rho_{Mk} \left[\alpha_M^{-k} - \alpha_M^k \right]; \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_M^{-k}(t) &= \left\| \alpha_{M_{jip}}^{-k}(t) \right\|_{n, m}; \\ \alpha_{M_{jip}}^{-k}(t) &= \alpha_{M_{jip}}^{-k}; \quad t \in \left[\frac{(p-1)\Gamma}{M}, \frac{p\Gamma}{M} \right]; \quad p = \overline{1, M}; \\ 0 &\leq \rho_{Mk} \leq 1. \end{aligned}$$

Длина шага ρ_{Mk} находится в результате решения задачи

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_{Mk}) &= \min_{0 \leq \rho_M \leq 1} \varphi(\rho_M) = \\ &= \min_{0 \leq \rho_M \leq 1} J \left[\alpha_M^k(t) + \rho_M \left(\alpha_M^{-k}(t) - \alpha_M^k(t) \right) \right]; \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Точка минимума в (15) аппроксимируется значением

$$\rho_k = 0,25 + \frac{0,25[\varphi(0) - \varphi(0,5)]}{0,5\varphi(0) - \varphi(0,5) + 0,5\varphi(1)}. \quad (16)$$

На третьем этапе алгоритма вводим критерий оптимальности.

Обобщая критерий останова алгоритма [7], получим

$$\begin{aligned} \Delta_{Mk} &= \left| J(\alpha_M^{k+1}) - J(\alpha_M^k) \right| \langle \varepsilon; \quad \varepsilon > 0 \\ \text{или} \quad \Delta_{Mk} &= \left| \sum_{j=1}^n w_j [y_M^{k+1}(T) - y_M^k(T)] \right| \langle \varepsilon, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\{\alpha_M^k(t), x^k(t), y^k(t)\}$ – k -ое приближение решения задачи (4) – (6).

Выводы. 1. В статье описан разработанный алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию

минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

2. Алгоритм оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. *Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХФВ «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1 (11). – С. 129 – 133.*
2. Кононов В.Б. *Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2 (18). – С. 155 – 158.*
3. Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. *Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5 (21). – С. 45 – 47.*
4. Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. *Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6 (22). – С. 277 – 280.*
5. Кононов В.Б. *Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 1 (17). – С. 59 – 62.*
6. Кононов В.Б. *Оптимальное управление распределением разнородных сил и средств по критерию максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ИПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – 2004. – Вип. 26. – С. 87 – 92.*
7. Кононов В.Б. *Алгоритм оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2004. – Вип. 9 (37). – С. 59 – 65.*

Поступила 17.12.2004

КОНОНОВ Владимир Борисович, канд. техн. наук, доцент, нач. кафедры ХУ ВС. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных исследований – исследование операций.