УДК 519.711

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИМЕНЬШЕМ ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАФАХ

к.т.н. С.В. Листровой, А.В. Сидоренко, к.т.н. А.Ю. Гуль
(представил д.ф-м.н., проф. С.В. Смеляков)

В работе показана возможность построения полиномиального алгоритма решения задачи о наименьшем вершинном покрытии в произвольных графах и предложен алгоритм решения этой задачи с временной сложностью, не превышающей $O(n^3)$.

Введение. Задача о наименьшем вершинном покрытии (ЗНВП) имеет широкое прикладное значение в теории построения сложных систем, в системах диагностики вычислительных систем и сетей и при разработке их программного и математического обеспечения [1, 2]. Она является частным случаем задачи о наименьшем покрытии (ЗНП), которую в общем случае можно рассматривать как задачу определения минимального числа столбцов, покрывающих единицами все строки некоторой булевой матрицы B. При этом, если добавляются ограничения на непересекаемость столбцов по единицам, то мы получаем частный случай этой задачи, называемой задачей о наименьшем разбиении (ЗНР).

Анализ литературы. В [1 – 6] описан ряд методов решения этих задач. Некоторые из них сначала разрабатывались для ЗНР, а потом приспосабливались к ЗНП. Простые методы, использующие дерево поиска для решения ЗНР, были предложены Пирсом, Гарфинкелем и Немхаузером [3, 4]. Лемке, Салкин и Шпильберг [1] предложили методы решения ЗНП, в которых используется дерево поиска и линейное программирование. Подходы, базирующиеся на рассмотрении отсекающих плоскостей и подобные в принципе тем, которые применяются в общем 0-1-программировании [5], представлены в работах Хауза, Нелсона и Радо [1], Белмора и Рэтлифа [6]. Сравнение этих методов и исследование их вычислительных характеристик приведено в [1, 7]. В [7] показано, что алгоритмы на основе рангового подхода [8, 9], отличающиеся от методов, основанных на идеях метода ветвей и границ, обладают меньшей временной сложностью и меньшей погрешностью. Для случая, когда матрица содержит в строке ровно 2 единицы и отображает некоторый произвольный граф, в [10] получен точный алгоритм ЗНВП для произвольных графов, не содержащих висячих вершин, с временной сложностью в худшем случае не превышающей $O(n^3)$. При этом в среднем его временная сложность с доверительной вероятностью 0,95 не превышает $O(n^2)$.

Цель статьи. В [10] отмечается, что наличие висячих вершин в графе может приводить к неточным решениям, в связи с чем представляет интерес разработать точные алгоритмы решения задачи определения минимальных вершинных покрытий в произвольных графах. В [11] предложен алгоритм решения задачи «3-выполнимость» линейной сложности, поэтому цель данной работы – разработка методики сведения ЗНВП к задаче «3-выполнимость», и на основе этого сведения построение точного алгоритма решения ЗНВП.

Постановка задачи. Представим произвольный граф G(V,E) (рис. 1) в виде булевой матрицы B, в которой столбцам i соответствуют вершины графа $\{v_i\}$, а строкам s – ребра $(v_q,v_j) \in E$ графа G(V,E). Элемент (i,s) равен 1, если вершина i принадлежит ребру, соответствующему s-й строке, и равен 0 в противном случае. Матрица B, в соответствии с [10], может быть представлена в конъюнктивной нормальной форме в виде булевой функции $F(v_1,v_2, \dots , v_n)$, содержащей s дизъюнктов. При этом в каждом дизъюнкте содержится по две переменные $(v_i \vee v_j)$, что соответствует теореме о представлении графа G(V,E) в конъюнктивной нормальной форме, приведенной в [10].

Решение задачи. Поставим в соответствие каждому ребру $\{v_i, v_j\} \in E$ графа G = (V, E) с множеством вершин $\{v_i\} \in V$ $i = \overline{(1,n)}$, и ребер E дизъюнкт $(v_i \vee v_j)$ с двумя переменными. В [10] приведена следующая теорема.

Теорема 1. Если f – булева функция, построенная по графу G = (V, E) в виде произведения дизъюнктов $(v_i \vee v_j)$, где $\{v_i\} \in \{0,1\}$ ($i = \overline{(1,n)}$, $j = \overline{(1,n)}$, $i \neq j$), и при этом каждый дизъюнкт $(v_i \vee v_j)$ соответствует ребру (v_i,v_j), то все наборы переменных $\{v_i, v_j\}$, на которых она принимает значение «истинно», соответствуют вершинным покрытиям в графе G = (V,E).

Из данной теоремы вытекает следующее важное следствие.

Для перечисления всех вершинных покрытий графа G = (V,E) необходимо определить те системы значений переменных $\{v_i, v_j\}$, при которых высказывание

$$f(V_1,V_2, \dots , V_n) = 1 \qquad (1)$$

«истинно».

Чтобы найти эти системы значений переменных $\{v_i, v_j\}$, необходимо привести левую часть (1) к минимальной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), раскрывая скобки и пользуясь законом поглощения. Такая форма единственна ввиду отсутствия в (1) логических отрицаний.

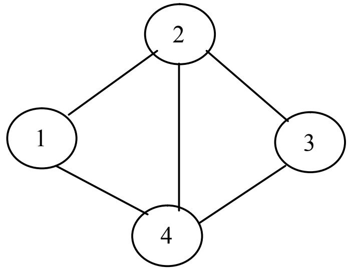

Рис. 1. Граф G

Покажем это на примере графа G, приведенного на рис. 1.

Булева функция для графа будет иметь вид

$$\begin{aligned} f &= (V_1 \vee V_2)(V_2 \vee V_3)(V_3 \vee V_4)(V_2 \vee V_4)(V_1 \vee V_4) = \\ &= (V_2 \vee V_1 V_3)(V_4 \vee V_1 V_2 V_3) = (V_2 V_4 \vee V_1 V_2 V_3 \vee V_1 V_3 V_4). \end{aligned} \tag{2}$$

Как видно из (2), в результате раскрытия скобок и приведения подобных, мы получили полный перечень вершинных покрытий графа G (рис. 1). Ими являются подмножества вершин: {2, 4}; {1, 2, 3}; {1, 3, 4}.

Граф G, приведенный в виде дерева путей (рис. 2), можно представить в виде матрицы B (рис. 3), в которой каждая строка соответствует ребру графа G, а столбец соответствует вершине графа G. Элемент матрицы B равен 1, если вершина i покрывает ребро (i, j), и равен 0 в противном случае.

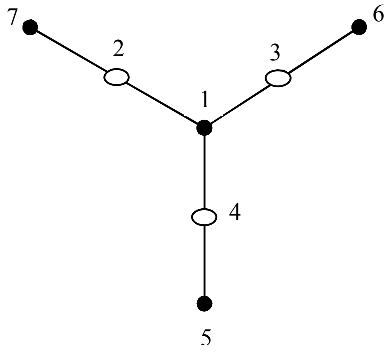

Рис. 2. Граф G

$$B = \left|\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3-6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Рис. 3. Матрица B

Тогда нахождение минимального вершинного покрытия в графе G эквивалентно определению минимального числа столбцов в матрице B, покрывающих единицами все строки матрицы B. В этом случае в матрице число столбцов определяется числом вершин n графа G, а число строк – числом ребер m графа G. При этом если граф связен, то каждый столбец B содержит ровно две единицы, а число строк больше или равно числу столбцов.

Если в матрице B выделить произвольный столбец j, то с ним можно связать некоторое подмножество столбцов {q}, с которыми данный столбец пересекается. Поскольку столбец j соответствует вершине графа, а число единиц в столбце определяется степенью вершины d_j, то подмножество {q} будет всегда содержать d_j таких столбцов. Подмножество столбцов $\{q\}_j$ образует связку столбцов относительно столбца j. Поскольку число столбцов в B равно числу вершин n в графе G(V,E), то и число возможных связок столбцов для матрицы B равно n. Следует отметить, что все столбцы в матрице B пересекаются друг с другом только по одной строке, поскольку в каждой строке матрицы B находится ровно по две единицы. Поэтому, с точки зрения их пересекаемости, возможность их принадлежности минимальному покрытию равновелика. Каждая связка столбцов $\{q\}_j$ покрывает определенное число строк l_j. Связку $\{q\}_j^*$, покрывающую максимальное число строк в матрице B, назовем максимальной. Если в графе G(V, E) есть висячие вершины, то это будет означать, что в матрице B есть столбцы P, содержащие только одну единицу, и, следовательно, связки этих столбцов будут содержать только по одному столбцу в каждой. Эти столбцы обладают интересным свойством, которое для произвольных графов G(V, E) определяется следующим утверждением.

Утверждение 1. Если граф G (V, E) содержит некоторое подмножество висячих вершин $Q \in V$, то подмножество вершин $P \in V$, смежных с Q, может быть дополнено до одного из минимальных вершинных покрытий графа G (V, E).

В общем случае, если в графе существует несколько минимальных вершинных покрытий, то могут существовать и минимальные вершинные покрытия без вершины, смежной с висячей вершиной графа G (V, E). Но если оно одно, то эта вершина обязательно в нем присутствует. Из утверждения 1 следует, что если в матрице B есть столбец j, содержащий одну единицу, то связка столбцов относительно столбца j, в данном случае она состоит из одного столбца, принадлежит минимальному покрытию V_{min}.

В случае представления графа в виде булевой функции $F(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, данное утверждение эквивалентно тому, что если в дизъюнктах есть переменная V_p, которая в дизъюнктах встречается один раз, то переменная $V_п$ составляющая ей пару в дизъюнкции, входит в покрытие. Следовательно, данную дизъюнкцию можно заменить переменной $V_п$ и при этом исключить из анализа все дизъюнкции, содержащие переменную $V_п$. В [10] при анализе графов G (V, E), не имеющих висячих вершин, представленных в конъюнктивной нормальной форме в виде некоторой булевой функции F, для определения наименьшего множества переменных $\{V_i\}$, которые покрывают все дизъюнкты в конъюнктивном представлении графа G (V, E), предложено использовать принцип суперпозиции в булевой алгебре, основанный на следующем равенстве:

$$f(V_1, V_2, \dots, V_n) = f(V_1 = 0, V_2, \dots, V_n) \vee \\ \vee f(V_1, V_2 = 0, \dots, V_n) \vee \dots \vee f(V_1, V_2, \dots, V_n = 0). \tag{3}$$

Особенностью конъюнктивного представления графа G(V,E) в виде булевой функции является то, что она содержит число дизъюнктов, равное числу ребер в графе, число переменных в каждом дизъюнкте равно 2, и каждая переменная соответствует некоторой вершине графа G(V,E). Для разработки алгоритма решения данной задачи введем следующую процедуру A.

Процедура A.

Шаг 1. В функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, представляющей дизъюнктивное представление графа G(V, E), полагаем $V_j = 0$. В результате в выражении для $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ образуется некоторый сомножитель $V_p * V_h * \dots * V_q$, состоящий из r переменных, находившихся в дизъюнктах совместно с V_i. При этом все дизъюнкты в $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, содержащие переменные $V_p ,V_h , \dots ,V_q$, исключаем из дальнейшего анализа.

Шаг 2. Проверяем, есть ли в дизъюнктах $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ переменные $\{V_k\}$, встречающиеся по одному разу. Если нет – то выполняем следующий шаг. Если да, то умножаем $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ на переменные $\{V_t\}$, стоящие совместно в дизъюнктах с переменными $\{V_k\}$, и исключаем из дальнейшего анализа все дизъюнкты в $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, содержащие переменные $\{V_t\}$.

Шаг 3. Находим в $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ переменную V_f, встречающуюся в дизъюнктах $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ чаще всего, и умножаем $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ на V_f, исключая при этом в $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ из анализа все дизъюнкты, содержащие переменную V_f. Если таких переменных несколько, то выбираем ту, которая чаще всего встречается в исходном выражении $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$. Если и в исходном выражении частоты появления переменных окажутся одинаковыми, то выбираем произвольную из них.

Шаг 4. Проверяем, есть ли в дизъюнктах функции, повторяющиеся в $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$. Если да, то переходим к выполнению шага 2, иначе – выполняем следующий шаг.

Шаг 5. По преобразованной функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$ строим конструкцию вида $Q_j = D_j \cup R_j$, где D_j – конъюнкция дизъюнкций, содержащих по одной переменной X_j, а R_j – конъюнкция, образованная из оставшихся дизъюнктов, содержащих две переменных, встречающихся по одному разу.

На этом процедура А заканчивает работу.

Для построения алгоритма введем весовую характеристику S_J конструкции $Q_j = D_j \cup Rj$, которую определим как суммарное число переменных, содержащихся в элементе конструкции D_j, и числа дизъюнктов в элементе R_j. Тогда на основе процедуры А можно предложить следующий алгоритм определения минимальных вершинных покрытий в произвольных графах, представленных в конъюнктивной нормальной форме в виде функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$.

Алгоритм определения минимального вершинного покрытия.

Шаг 1. Присваиваем j значение 1.

Шаг 2. Выполняем процедуру А преобразования функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, в результате которого строим конструкцию $Q_j = D_j \cup R_j$ и определяем ее весовую характеристику S_J.

Шаг 3. Проверяем: $j = n$? Если нет, то j увеличиваем на 1 и переходим к выполнению шага 2, иначе – выполняем следующий шаг.

Шаг 4. Среди конструкций $\{Q_j\}$ выбираем конструкцию Q_j^* с минимальной весовой характеристикой S_J^{min}.

На этом алгоритм заканчивает работу, поскольку конструкция Q_j^* определяет минимальное вершинное покрытие.

Следует отметить, что получение точного решения без использования соотношения (3) не представляется возможным. Казалось бы, что можно более быстро получить решение поставленной задачи применяя процедуру А непосредственно к функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, однако при этом можно потерять оптимальное решение задачи. Последнее обусловлено тем, что может существовать некоторое подмножество переменных, частота появления которых больше в дизъюнктах функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$, но эти переменные не принадлежат минимальному покрытию всех дизъюнктов функции $f(V_1,V_2, \dots ,V_n)$. Поясним это на примере решения задачи о минимальном вершинном покрытии графа на основе предложенного в данной работе алгоритма.

Пример решения ЗНВП.

Пусть требуется определить минимальное вершинное покрытие в графе G (рис. 2). Граф G можно задать матрицей B, в которой каждая строка соответствует ребру графа G , а столбец соответствует вершине графа G. Элемент матрицы B равен 1, если вершина i покрывает ребро (i, j), и равен 0 – в противном случае. Тогда нахождение минимального вершинного покрытия в графе G эквивалентно определению минимального числа столбцов в матрице B, покрывающих единицами все строки матрицы B. Т.е. мы пришли к рассматриваемой в данной работе задаче, особенностью которой является то, что число единиц в каждой строке равно 2. Решим данную задачу, используя предложенный алгоритм.

Запишем конъюнктивное представление матрицы В.

$$F = (X_1 \vee X_2)(X_1 \vee X_3)(X_1 \vee X_4)(X_2 \vee X_7)(X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5). \qquad (4)$$

Полагая $X_1 = 0$, получим:

$$F = X_2 X_3 X_4 (X_2 \vee X_7)(X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5) = X_2 X_3 X_4. \qquad (5)$$

В (5) переменные $X_2X_3X_4$ поглощают скобки $(X_2 \vee X_7)$ $(X_3 \vee X_6)$ $(X_4 \vee X_5)$. Далее формируем конструкцию

$$Q_1 = D_1 \cup R_1, \text{ где } D_1 = X_2 X_3 X_4,\ R_1 = \varnothing;\ S_{J=1} = 3. \qquad (6)$$

Полагаем $X_2 = 0$, тогда

$$F = X_1(X_1 \vee X_3)(X_1 \vee X_4)X_7(X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5) = X_1X_7(X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5). \quad (7)$$

В (7) переменная X_1 поглощает скобки $(X_1 \vee X_3)$ $(X_1 \vee X_4)$. Так как в дизъюнктах переменные не повторяется преобразование (7), то прекращаем и формируем соответствующую конструкцию:

$$Q_2 = D_2 \cup R_2, \text{ где } D_2 = X_1 X_7,\ R_2 = (X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5);\ S_{J=2} = 4. \qquad (8)$$

Аналогичным образом формируем следующие конструкции:

$$\begin{aligned}
&Q_3 = D_3 \cup R_3, \text{ где } D_3 = X_1 X_6,\ R_3 = (X_2 \vee X_7)(X_4 \vee X_5);\ S_{J=3} = 4;\\
&Q_4 = D_4 \cup R_4, \text{ где } D_4 = X_1 X_5,\ R_4 = (X_2 \vee X_7)(X_3 \vee X_6);\ S_{J=4} = 4;\\
&Q_5 = D_5 \cup R_5, \text{ где } D_5 = X_1 X_4,\ R_5 = (X_2 \vee X_7)(X_3 \vee X_6);\ S_{J=5} = 4; \qquad (9)\\
&Q_6 = D_6 \cup R_6, \text{ где } D_6 = X_1 X_3,\ R_6 = (X_2 \vee X_7)(X_4 \vee X_5);\ S_{J=6} = 4;\\
&Q_7 = D_7 \cup R_7, \text{ где } D_7 = X_1 X_2,\ R_7 = (X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5);\ S_{J=7} = 4.
\end{aligned}$$

Как видно из соотношений (6) – (9), минимальное покрытие состоит из трех переменных X_2, X_3, X_4 . В графе G ему соответствуют вершины 2, 3 и 4 (они на рис. 2 выделены более крупными кружками). Если сразу применить преобразование к (4), то, поскольку переменная X_1 чаще всего встречается в дизъюнктах, получим

$$F = X_1(X_2 \vee X_7)(X_3 \vee X_6)(X_4 \vee X_5).$$

В данном соотношении все переменные встречаются по одному разу, следовательно, дальнейшее преобразование не имеет смысла, но в соответствии с ним покрытие может быть образовано только четырьмя переменными, например X_1, X_2, X_3, X_4, но, как мы убедились, минимальным является покрытие X_2, X_3, X_4.

Использование соотношения (3) в алгоритме имеет наглядный физический смысл при определении минимальных вершинных покрытий в полном графе, поскольку полный граф с n вершинами имеет n-минимальных вершинных покрытий, которые включают в себя все вершины без 1-й, все вершины без 2-й, и т.д., все вершины без n-й вершины.

Экспериментальное исследование разработанного алгоритма.

Экспериментальное исследование разработанного алгоритма проводилось для деревьев, содержащих m ярусов и n вершин, где m изменялось от 5 до 20 с шагом 1, а также для произвольных графов с различными плотностями ребер в графе. Плотность изменялась от 0,1 до 0,5, а число вершин от 4 до 100. Графики зависимости числа элементарных операций от числа вершин в графе приведены на рис. 4 – 5.

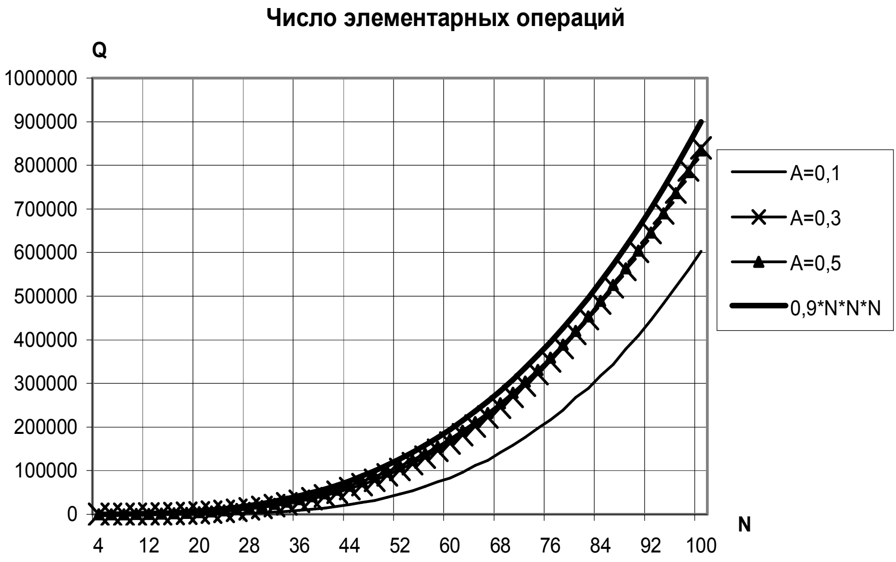

Рис. 4. Зависимость числа ЭО, выполняемых алгоритмом, от размерности графа при различных значениях плотностей ребер в графе

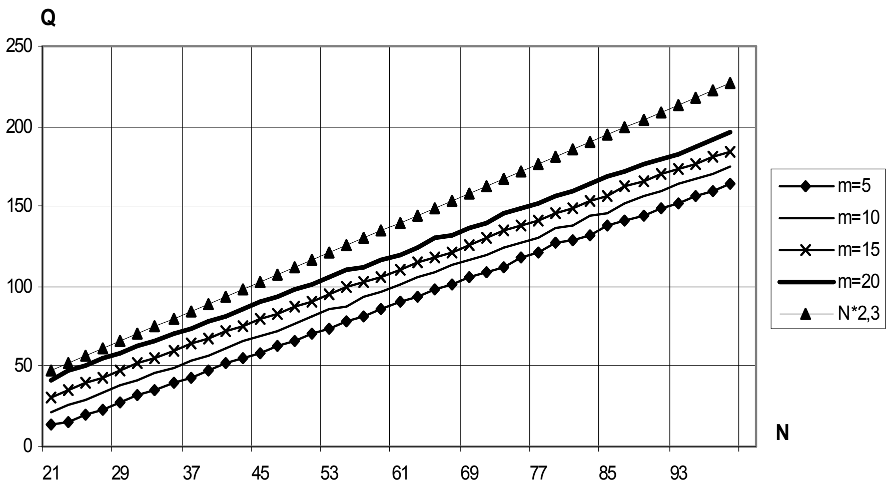

Рис. 5. Зависимость числа ЭО, выполняемых алгоритмом,

от числа вершин в дереве

Выводы. Как видно из графиков, временная сложность алгоритма определения минимальных вершинных покрытий в графе в среднем в худшем случае не превышает $O(0,9n^3)$, а в случае, когда граф представляет собой дерево, $O(2,3n)$. Проверка точности работы алгоритма проводилась в сравнении с точным алгоритмом, приведенным в [8], из 100000 реализаций несовпадений не было обнаружено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 309 с.*
2. *Balinski M. Integer programming: methods, uses, computation // Man. Sci. – 1965. – 12. – P. 253.*
3. *Garfinkel R.S. Nemhauser G.L. The set partitioning problem: set covering with equality constraints // Ops.Res.– 1969. – 17. – P. 848.*
4. *Pierce J.F. Application of combinatorial programming to a class of all-zero-one integer programming problems // Man. Sci. – 1968. – 15. – P. 191.*
5. *Gomory R. An algorithm for integer solutions to linear programs, Recent Advances in mathematical Programming,Graves and Wolfe,Eds., McGraw-Hill, New York, 1963.*
6. *Bellmore M., Ratliff H.D. Set covering and involuntary bases // Man. Sci. – 1971. – 18. – P. 427.*
7. *Листровой С.В., Симашкевич О.Н. Об использовании гарантированных прогнозов в методах решения задач булевого программирования на основе рангового подхода // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, № 4. – С. 89 – 103.*
8. *Листровой С.В. Гуль А.Ю. Метод решения задачи о минимальном покрытии на основе рангового подхода. // Электронное моделирование. – 1999. – № 1. – С. 58 – 70.*
9. *Listrovoy S.V. and Gul A.Yu. Method of Minimum Covering Problem Solution on the Basis of Rank Approach // Engineering Simulation. – 1999. – Vol. 17. – P. 73 – 89.*
10. *Листровой С.В Яблочков С.В. Метод решения задачи определения минимальных вершинных покрытий и независимых максимальных множеств // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, №2. – С. 31 – 40.*
11. *Листровой С.В. Метод решения задачи 3 выполнимость // Электронное моделирование. – 2001. – № 6. – С. 66 – 76.*

Поступила 22.12.2004

ЛИСТРОВОЙ Сергей Владимирович, *канд. техн. наук, доцент Харьковского университета Воздушных Сил. Область научных исследований – дискретная оптимизация.*

СИДОРЕНКО Андрей Владимирович, *адъюнкт Харьковского университета Воздушных Сил. В 2001 году окончил ХВУ. Область научных исследований – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.*

ГУЛЬ Александр Юрьевич, *канд. техн. наук, начальник НИЛ Харьковского университета Воздушных Сил. Область научных исследований – применение задач дискретной оптимизации в радиотехнических системах.*