УДК 621.517

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПАКЕТА WAVELET TOOLBOX ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

О.В. Романько
(Научный метрологический центр военных эталонов, Харьков)

В статье рассмотрена систематизация вейвлет-функций по наиболее существенным признакам для проведения интегрального анализа. Выбран тип преобразования для решения конкретных прикладных задач.

вейвлет-функция, спектральный анализ, вейвлет-анализ

Введение. Спектральный анализ в базисе вейвлетов очень хорошо интерпретируется в терминах традиционного преобразования Фурье и имеет целый ряд преимуществ, что обусловливает его все более широкое применение [1 – 6].

Переходу вейвлет-технологии от теории, безусловно важной, к широкой практике во многом содействует разработка программных инструментальных средств. Пожалуй, наиболее полные средства, позволяющие выполнять практически все виды вейвлет-преобразований как в командном режиме, так и с помощью средств интерфейса пользователя (GUI), дает пакет расширения системы компьютерной математики (СКМ) MATLAB 6.0/6.5 – Wavelet Toolbox, представляющий собой мощную и вполне завершенную математическую компьютерную лабораторию [7 – 8].

При этом представленные в Wavelet Toolbox виды вейвлет-преобразований достаточно сильно отличаются друг от друга и определениями, и имеющимися свойствами, и кругом приложений, что требует для все более расширяющегося круга пользователей сведений по систематизации наиболее распространенных на сегодняшний день разновидностей выше указанных преобразований.

Цель работы: систематизация вейвлет-функций (ВФ) по наиболее существенным для проведения спектрального анализа признакам, позволяющая реально оценить многообразие конструкций вейвлетов и выделить тип преобразования, предпочтительный для решения конкретной прикладной задачи в СКМ MATLAB.

1. Выбор вейвлета. Базис вейвлетов – это функции времени (пространства) типа $\psi((t-\tau)/\gamma)$, где γ – параметр масштаба, τ – параметр сдвига. Параметры сдвига, сжатия или расширения меняются непрерывно с ограничением $\gamma \neq 0$. Для практических приложений достаточно условия $\gamma > 0$. При этом переменная масштаба γ может интерпретироваться как гиперболическое преобразование частоты $\omega = \omega_0 / \gamma$, где ω_0 – постоянная, определяющая единицы измерения связанных переменных.

Установившегося определения вейвлета не существует, и любая функция может стать вейвлетом, если характеризуется следующими принципиально важными свойствами: имеет вид короткого, локализованного во времени волнового пакета с нулевым значением интеграла; обладает возможностью сдвига во времени; способна к масштабированию (сжатию/растяжению); имеет ограниченный (или локальный) частотный спектр; норма функции конечна. Разработан достаточно широкий круг способов, позволяющих конструировать ВФ, множество которых становится трудно обозримым.

В пакете Wavelet Toolbox 2.0/2.1 представлено полтора десятка материнских вейвлетов (при этом для ряда из них даны различные варианты), свойства которых, влияющие на возможности проведения спектрального анализа, предлагается классифицировать по признакам, сведенным в табл. 1. Знаками (+) отмечено наличие классификационного признака. Характеристика признаков и их влияние на свойства декомпозиции, восстановления, обесшумливания сигналов и других практических приложений достаточно широко освящена в литературе, и их пояснения выходят за рамки данной работы.

В качестве возможных приоритетов для выбора конкретного вейвлета для спектрального анализа могут быть предложены свойство регулярности, число нулевых моментов, число вейвлет-коэффициентов, превышающих некоторое пороговое значение, не говоря уже о требуемых вычислительных затратах.

С точки зрения оценивания параметров спектра сигналов, т.е. обеспечения высокой разрешающей способности по частоте, хорошая локализация в частотной области вейвлет-функций является одним из основных требований для эффективной оценки мгновенного спектра сигнала.

Как отмечалось, чтобы быть вейвлетом, функция $\psi(t)$ должна иметь нулевую площадь и, что еще лучше, равный нулю первый, второй и т.д. моменты. Фурье-преобразование таких функций равно нулю при $\omega = 0$ и имеет вид полосового фильтра. В наибольшей степени для этих целей подходят базисные функции с компактным носителем в частотной области и многократно дифференцируемые, так как. m-кратное дифференцирование гарантирует затухание частотной характеристики как $1/\omega^m$ и определяет крутизну фронтов полосовых фильтров спектрального анализа.

При различных значениях γ будет сформирован набор (блок) полосовых фильтров, способных проводить анализ спектральных характеристик различных сигналов. Форма частотной характеристики фильтров полностью определяется спектральными свойствами базисных ВФ.

Таблица 1

Систематизация свойств вейвлетов СКМ MATLAB

Вейвлеты		Свойства								
		Частотная локализация	Регулярность		Нулевые моменты	КИХ фильтр	Скейлинг-функция	Ортогональность	Быстрые алгоритмы	Явное выражение
Название	Мнемоническое обозначение		Конечная	Бесконечная						
Хаара	haar	–	–	–	–	+	+	+	+	+
Гаусса	gaus	+	–	+	–	–	–	–	–	+
Морле	morl	+	–	+	–	–	–	–	–	+
Мексиканская шляпа	mexh	+	–	+	–	–	–	–	–	+
Комплексные Гаусса	cgauN	+	–	+	–	–	–	–	–	+
Комплексные Морле	cmorFb-Fc	+	–	+	–	–	–	–	–	+
Шеннона	shanFb-Fc	+	–	+	–	–	–	–	–	+
B-сплайновые	fbspM-Fb-Fc	+	–	+	–	–	–	–	–	+
Мейера	meyr	+	–	+	–	–	+	+	–	–
Дискретный Мейера	dmey	+	–	–	–	+	+	+	+	–
Добеши	dbN	–	+	–	+	+	+	+	+	–
Симлета	symN	–	+	–	+	+	+	+	+	–
Койфлета	coifN	–	+	–	+	+	+	+	+	–
Биортогональные	biorNr.Nd	–	+	–	+	+	+	–	+	–
Обратные биортогональные	rbioNr.Nd	–	+	–	+	+	+	–	+	–

Так, вейвлеты Мейера во временной области являются целыми функциями экспоненциального типа, поэтому имеют финитные преобразования Фурье. ВФ Добеши обладают лишь конечным числом непрерывных производных, поэтому их Фурье-образ убывает как $|\omega|^{-m}$ при $\omega \to \infty$ (m – число непрерывных производных вейвлета, зависящее от порядка вейвлета).

Часть вейвлетов может быть представлена в виде фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ). В этом случае на основе теории цифровой фильтрации исключительно изящно и практически удобно представлять диадное вейвлет-преобразование (иногда его называют «дискретным»). При этом частоты настройки соседних фильтров отличаются в два раза, а полоса пропускания фильтра линейно уменьшается с уменьшением центральной частоты (октавнополосная фильтрация).

Это свойство вейвлет-фильтрации позволяет одновременно решать задачу спектрального оценивания в области высоких частот и высокого спектрального разрешения в области низких частот, что очень важно при исследовании процессов, спектральная плотность мощности которых распределена обратно пропорционально значению частоты $\omega^{-\alpha}$, где $\alpha > 1$.

Важным свойством вейвлета является регулярность, определяющая его способность к очень точному анализу гладких функций. "Отбросить" гладкие полиномиальные зависимости и вскрыть потенциально присутствующие сингулярности позволяют вейвлеты, имеющие много нулевых моментов.

В пакете Wavelet Toolbox представлен ряд вейвлетов, имеющих скейлинг-функции и обладающих свойством ортогональности. Это заметно облегчает анализ и дает возможность реализовать алгоритмы быстрых вейвлет-преобразований. Однако и вейвлеты, которые свойствами ортогональности не обладают, практически полезны, например, при решении задач идентификации локальных особенностей сигналов.

К сожалению, многие вейвлеты не имеют явного выражения, т.е. не могут быть записаны в виде одной аналитической формулы, что не способствует аналитическому исследованию свойств ВФ, однако дает возможность разрабатывать иттерационные алгоритмы работы ЭВМ.

2. Модельный эксперимент. Вейвлет-спектр $W(\gamma,\tau)$ одномерного сигнала $s(t)$ представляет собой поверхность коэффициентов вейвлетного преобразования в трехмерном пространстве. Способы визуализации и представления этой информации могут быть различными.

По аналогии со спектром мощности преобразования Фурье можно ввести в рассмотрение интегральное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования

$$I(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| W_s(\gamma, \tau) \right|^2 d\tau ,$$

которое характеризует интенсивность всех пульсаций сигнала заданного масштаба.

На рис. 1 показаны результаты применения вейвлетного преобразования с различными базисными вейвлетами к сигналу

$$s_1(t) = \sin(2pf_0 t),$$

$$t = n \cdot \Delta t,\ n = 1,\ 2, \ldots$$

в виде отношения $Z_W = I(\gamma) / I_{max}(\gamma)$ с дальнейшим преобразованием координатной оси масштабов в ось частот.

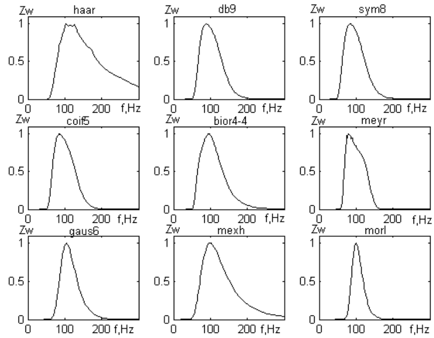

Рис. 1. Относительное интегральное распределение энергии синусоидального сигнала частотой 100 Гц для различных базисных вейвлетов

Интегральное распределение энергий по частотам в данном случае имеет один максимум, который совпадает со значением частоты $f_0 = 100$ Гц. Однако результаты вейвлетного преобразования различаются достаточно существенно даже визуально для разных базисных функций. Форму, наиболее приближенную к Фурье образу сигнала, имеет преобразование, полученное с помощью вейвлета Морле. Кроме того, данный вейвлет обладает хорошим частотным разрешением, а наличие явного выражения дает возможность проводить теоретические исследования.

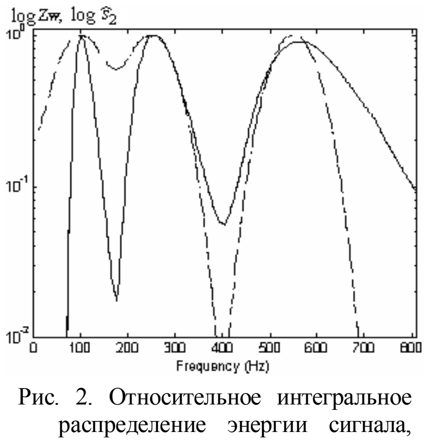

Рис. 2. Относительное интегральное распределение энергии сигнала, состоящего из суммы синусоид с частотами 100, 250 и 550 Гц. Сплошная линия – вейвлет-преобразование с базисным вейвлетом Морле, пунктирная – кратковременное преобразование Фурье с окном Ханна, длительностью 32 отчета и перекрытием 50%

На рис. 2 представлен энергетический спектр сигнала, представляющего собой сумму трех синусоид с одинаковыми амплитудами:

$$s_2(t) = \sin(2\pi 100\, t) + \\ + \sin(2\pi 250\, t) + \sin(2\pi 550\, t),$$

$$t = n \cdot \Delta t,\ n = 1,\ 2, \ldots .$$

Для наглядности представления полученных результатов максимальные амплитуды Фурье-спектра сигнала $\hat{s}_2(\omega)$ и его вейвлет-спектра приведены к единице.

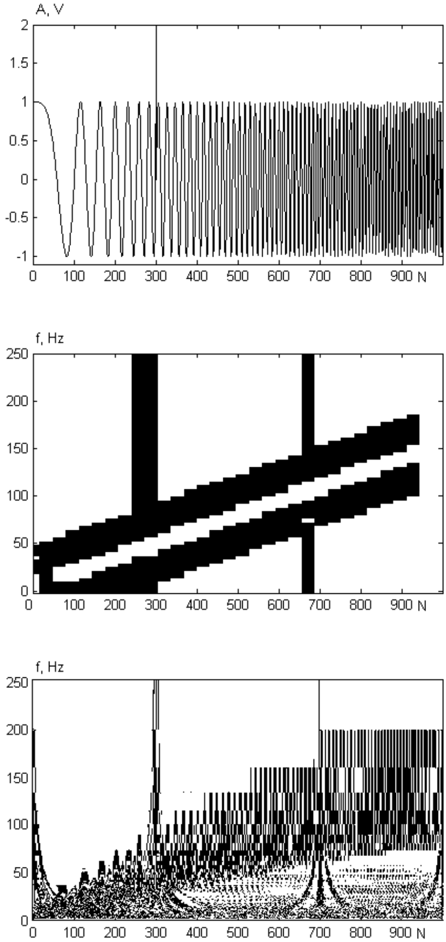

Рис. 3. Сигнал с линейно изменяющейся частотой, имеющий сингулярности: выброс на отсчете N = 300 и равенство нулю на отсчете N = 700: а) временная реализация; б) спектрограмма (с окном Ханнинга 64 отсчета); в) скейлограмма (базисный вейвлет Морле)

Спектральный образ каждой из составляющих сигнала, полученный с помощью оконного преобразования Фурье, имеет одинаковую конечную ширину, зависящую от свойств и ширины выбранного во временной области окна. Ширина вейвлетного спектра при неизменных параметрах материнского вейвлета является переменной величиной.

Полученный результат имеет следующую трактовку. В терминах традиционного анализа сигналов фильтры, связанные с оконным преобразованием Фурье, можно назвать фильтрами с постоянной полосой пропускания, тогда как вейвлеты необходимо рассматривать как фильтры с постоянной относительной полосой пропускания. В связи с этим, с уменьшением средней частоты вейвлет-анализа частотное разрешение увеличивается (рис. 2).

Другая важная особенность вейвлет-анализа представлена на рис. 3. Временная реализация сигнала (рис. 3,а) с линейно нарастающей частотой содержит достаточно часто встречающиеся на практике случаи "промахов" в измерениях, выраженные в виде скачка амплитуды на отсчете N = 300 и равенстве нулю измеренного значения на отсчете N = 700:

$$s_3(t) = \sin(2\pi 150\, t^2) + 2\delta(t-300) + 0 \cdot \delta(t-700).$$

И если по внешнему виду сигнала скачки амплитуды можно легко определить визуально, то при большом наборе значений сигнала справиться с задачей идентификации резкого уменьшения амплитуды сигнала без специальных приемов невозможно. На рис. 3, б, в представлены результаты оконного Фурье-преобразования и вейвлет-преобразования в виде их проекций на плоскость "время-частота" с изоуровнями, позволяющими проследить изменение спектра по изменению интенсивности окраски. С помощью спектрограммы (рис 3, б) можно определить наличие резких изменений амплитуды сигнала, но не удается точно их локализовать, так как спектр особенности сигнала рассредоточен по всей оси частот. Вейвлет-преобразование решает эту проблему. На рис. 3, в можно не только определить наличие сингулярностей, но и точно локализовать их местоположение.

Таким образом, сравнение этих рисунков позволяет сделать заключение о высокой разрешающей способности вейвлет-анализа времени появления сингулярностей сигнала, особенно в высокочастотной области.

Недостатком приведенных примеров спектрального анализ является его качественный уровень. В области использования оконного преобразования Фурье существует ряд количественных показателей, характеризующих качество оконной функции, такие как ширина основного лепестка на определенном уровне, величина ближайшего бокового лепестка и расстояние до него, паразитная амплитудная модуляция, потери информации и т.п.

Отсутствие четких количественных критериев достоинств вейвлет-функций с точки зрения их применения для решения определения частотного состава измеряемого сигнала является существенным сдерживающим фактором для более широкого распространения вейвлетного частотно-временного анализа.

Выводы. Существует проблема высокой вариативности вейвлетного спектра от вида материнской вейвлет-функции. При этом разнообразие вейвлетов пакета Wavelet Toolbox резко расширяет круг решаемых с их помощью прикладных задач и делает такое решение творческим процессом, требующим от исследователя определенных практических навыков по интерпретации полученных результатов.

В СКМ MATLAB существует достаточное разнообразие вейвлет-функций , имеющих желательные свойства для проведения спектрального анализа: хорошая локализация в частотной области, возможность выбора явно выраженных базисов, многократная дифференцируемость, быстрые алгоритмы и систематизированные КИХ-фильтры для реализации вейвлет-преобразования. При отсутствии априорной информации о структуре анализируемого сигнала рекомендуется начинать анализ с применения вейвлета Морле. При этом полученные результаты обладают достаточной степенью приближенности к оконному преобразованию Фурье и позволяют выделять одновременно как основные характеристики сигнала, так и короткоживущие высокочастотные явления. Для решения практических задач более предпочтительным будет применение вейвлетов Добеши, позволяющее интерпретировать результаты с позиций цифровой фильтрации и применять быстрые алгоритмы для расчета вейвлет-коэффициентов.

Основным направлением дальнейших исследований в области использования вейвлетного преобразования должно быть разработка количественных параметров для вейвлетных функций, позволяющих более строго подходить к их выбору при решении задач спектрального анализа в различных приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование. // Успехи физических наук. – 2001. – Том 171, № 5. – С. 465 – 501.*
2. *Ососков Г.А., Полянский А., Пузынин И.В. Современные методы обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий // Физика высоких энергий. – 2002. – Т. 33, вып. 3. – С. 676 – 745.*
3. *Le G.M., Wang J.L. Wavelet analysis of several periodic properties in the relative sunspot numbers // Chinese journal of astronomy and astrophysics. – 2003. – V. 3, № 5. – P. 391 – 394.*
4. *Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с..*
5. *Поршнев С.В. Применение непрерывного вейвлет-преобразования для обработки широкополосных частотно-модулированых сигналов // Вычислительные методы и программирование. – 2003. – Т. 4. – С. 104 – 116.*
6. *Романько В.Н., Романько О.В., Клейман А.С. Анализ случайных сигналов в базисе вейвлетов. Український метрологічний журнал. – 2003. – Вип. 3 –. С. 13 – 18.*
7. *Misiti M., Yves Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J-M. Wavelet toolbox for use in Matlab: User's Guide. – The Math Works Inc., 24 Prime Park Way, Natick, 1996. – First printing. – 626 p.*
8. *Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.*

Поступила 17.01.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор А.С. Клейман,
Национальный научный центр «Институт метрологии», Харьков.