УДК 621.317.089.6(045)

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МОДУЛЯ АМПЛИТУДНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

В.Н. Чинков[1], Ю.А. Крыхтин[2]
([1]Харьковский университет Воздушных Сил,
[2]Научный метрологический центр военных эталонов, Харьков)

Предлагается модифицированный численный метод определения модуля амплитудного значения (МАЗ) полигармонического сигнала (ПГС). Даются аналитические соотношения для расчета оптимального количества точек, в которых следует вычислить значение полигармонического сигнала, в зависимости от спектрального состава и требуемой точности определения МАЗ сигнала.

полигармонический сигнал, адаптивный метод, спектральный анализ

Постановка проблемы. Одним из перспективных направлений развития цифровой измерительной техники является разработка и создание прецизионных калибраторов сигналов с нормируемыми метрологическими характеристиками [1]. Основной проблемой данного направления является синтез ПГС с требуемым спектральным составом. Поставленная в работе [2] научная задача формирования кусочно-ступенчатого полигармонического сигнала с равномерным спектром и максимальной полезной мощностью, у которого минимизирован разброс между максимальным и минимальным уровнями, требует многократного нахождения МАЗ ПГС при различных наборах начальных фаз гармонических составляющих. Причем точность определения данного параметра существенно влияет на сходимость процесса оптимизации сигнала по фазам.

Аналитические методы нахождения МАЗ существенно ограничены из-за сложности их реализации при большом количестве полезных частот в сигнале. Поэтому для определения МАЗ целесообразно использование численных методов, среди которых наиболее простым в реализации является метод, предусматривающий вычисление значений полигармонического сигнала в N точках на временной оси (далее – точки дискретизации) и последующий выбор максимального из них по модулю стандартной процедурой, заложенной в современные системы компьютерной математики [3, 4]. Для этого необходимо найти аналитическое соотношение для расчета оптимального количества точек дискретизации, в которых следует вычислить значения ПГС, в зависимости от его спектрального состава и необходимой точности определения модуля его амплитудного уровня.

Анализ литературы. В общем виде нахождение МАЗ ПГС аналитическими методами сводится к нахождению экстремумов сигнала на интервале одного периода и выбору максимального из них по модулю. Согласно [5], экстремумы ПГС определяют решением трансцендентного тригонометрического уравнения, представляющего собой равенство нулю первой производной сигнала по времени. В дальнейшем, выполнив предварительные преобразования гармонического полинома в степенной тригонометрический, приводят данное уравнение к алгебраическому виду. Преобразования полиномов можно осуществить двумя способами: либо используя формулу Муавра для комплексных чисел и осуществляя приравнивание ее действительных и мнимых частей для каждой гармоники [5], либо руководствуясь формулами для расчета коэффициентов одного вида полинома по заданным значениям коэффициентов другого [6]. Однако такой подход имеет существенные недостатки, обусловленные сложностью преобразований полиномов при большом количестве полезных гармоник в сигнале, необходимостью учета многозначности решения и исключения посторонних результатов (при неэквивалентных преобразованиях). Известно ряд численных методов решения данной задачи: итерационные методы (метод Ньютона, метод наискорейшего спуска, релаксации), а также различные методы поиска [7 – 9], но практическая их реализация связана с большими временными и машинными затратами на вычисление градиента, очередного шага приближения к результату или на сложную процедуру поиска.

Цель статьи заключается в разработке модифицированного численного метода определения МАЗ ПГС с требуемой точностью и с учетом спектрального состава синтезируемого сигнала.

Решение задачи адаптивного нахождения модуля амплитудного значения полигармонического сигнала. Запишем математическое выражение синтезируемого полигармонического сигнала $F(\alpha)$:

$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^{M} c_k W_k A_k \cos k\alpha \, , \tag{1}$$

где $\alpha = \omega_0 t$ – фазовый угол ($0 \le \alpha \le \pi$); ω_0 – основная частота ПГС; k – номер гармоники; A_k – амплитуда k-й гармоники; M – номер наибольшей контролируемой частоты; ρ_k – весовые коэффициенты, причем $\rho_k = 1$, если k-я гармоника входит в сетку контрольных частот, и $\rho_k = 0$, если не входит; W_k – фазовые коэффициенты, определяемые, исходя из четности ПГС, выражением

$$W_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_k = 0; \\ -1, & \text{если } \varphi_k = \pi, \end{cases}$$

φ_k – начальная фаза k-й гармоники.

Зададимся равномерным шагом по фазе $\Delta\alpha = \pi/N$. Рассмотрим часть полуволны ПГС, на которой находится экстремальное значение F_{max}, при самом неблагоприятном случае, т. е. когда значения сигнала в соседних точках дискретизации одинаковы: $F_1 = F_2 = F$ (рис. 1). Максимальная относительная погрешность определения МАЗ оценивается по формуле:

$$\text{д}_{\max} = \frac{\Delta F}{F_{\max}} \cdot 100\%, \qquad (2)$$

где $\Delta F = F_{max} - F$ (максимальная абсолютная погрешность определения МАЗ).

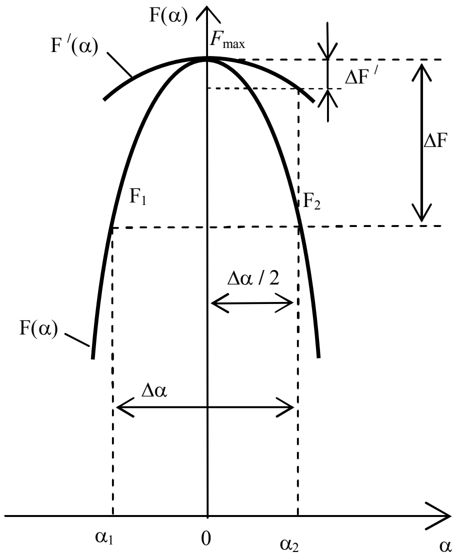

Рис. 1. Часть полуволны полигармонического сигнала

Следовательно, решение задачи адаптивного нахождения МАЗ ПГС сводится к определению такого значения $\Delta\alpha$, при котором погрешность δ_{max} не превышает некоторой заданной величины.

Кроме того, необходимо оценить влияние количества гармоник ПГС (его спектрального состава) на величину ΔF. Так как количество экстремумов ПГС, определяемого выражением (1), на интервале $0 \le \alpha \le \pi$ не превышает количества экстремумов наивысшей гармоники (М-й), входящей в его состав, проанализируем возможность использования функции $F'(\alpha) = A_M \cos M\alpha$ при выводе аналитического соотношения для расчета оптимального количества точек дискретизации. Положив $A_M = 1$, применим для сигнала $F'(\alpha)$ разложение в ряд Тейлора в точке дискретизации $\alpha = 0$ с точностью до квадратичного члена: $\tilde{F}'(\alpha) = 1 - (M\alpha)^2/2$ и найдем величину $\Delta F'$:

$$\Delta F' = (M\Delta\alpha)^2/8. \qquad (3)$$

Для сравнения проведем аналогичные преобразования с сигналом $F''(\alpha) = A_M \cos M\alpha + A_{M-1} \cos (M-1)\alpha$. При $A_M = A_{M-1} = 1$ получим

$$\Delta F'' = \left((M\Delta\alpha)^2/8\right) \cdot \left[1 + (1/M - 1)\right]. \qquad (4)$$

Анализ формул (3) и (4) позволяет сделать вывод о том, что наибольшей крутизной обладает участок функции $F(\alpha)$, на котором все полуволны гармоник будут иметь общую точку минимума (максимума), например, точка

$\alpha = 0$ для сигнала (1), когда все коэффициенты $W_k = 1$, т.е. фазы гармоник равны нулю (наглядное подтверждение данного факта представлено на рис. 2).

Разложив для этих условий выражение (1) в ряд Тейлора до квадратичного члена, получим

$$\widetilde{F}(\alpha) = \sum_{k=1}^{M} \rho_k A_k \left[1 - \frac{1}{2}(k\alpha)^2\right]. \quad (5)$$

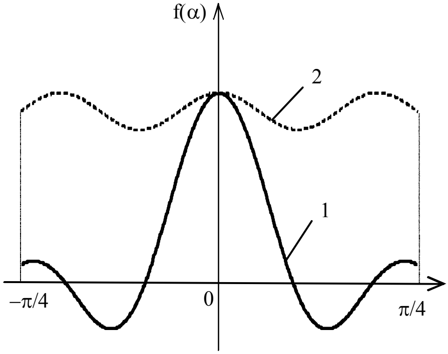

Рис. 2. Графическое представление ПГС и его М-й гармоники: 1 – ПГС, состоящий из 10-ти полезных гармоник, $\rho_k = 1$, $A_k = 1$, $W_k = 1$; 2 – 10-я гармоника сигнала $\rho_{10} = 1$, $A_{10} = 1$, $W_{10} = 1$

Значение полигармонического сигнала в точке α_2 равно (рис. 1)

$$F = F_{max} - \Delta F = \\ = \sum_{k=1}^{M} \rho_k A_k \left(1 - \frac{\delta}{100}\right). \quad (6)$$

В то же время сигнал $\widetilde{F}(\alpha)$ (5) в точке α_2 принимает значения

$$\widetilde{F}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \sum_{k=1}^{M} \rho_k A_k - \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{M} \rho_k A_k k^2. \quad (7)$$

Приравнивая правые части равенств (6) и (7), найдем выражение для приближенной оценки оптимального количества точек дискретизации, в которых будут определяться значения ПГС:

$$N' = \pi \sqrt{\sum_{k=1}^{M} \rho_k A_k k^2 \Big/ 0{,}08\delta \sum_{k=1}^{M} \rho_k A_k}\ . \quad (8)$$

В частном случае (при $\rho_k = 1$, $A_k = 1$, $W_k = 1$) выражение (8) можно представить в виде

$$N' = \pi\sqrt{(2M+1)(M+1)/0{,}48\delta}\ . \quad (9)$$

Используя стандартную функцию любого математического пакета (например, в системе компьютерной математики MATLAB это функция ceil [4]), найденное значение N' округляем до ближайшего целого числа в положительную сторону, получая искомую оценку количества точек дискретизации N, и определяем значение шага $\Delta\alpha = \pi/N$. Вычисляем абсолютные значения ПГС для аргументов $(q-1)\Delta\alpha$, где $q = \overline{1, N+1}$, и выбираем из них максимальное.

Для примера рассмотрим тестовый ПГС для контроля каналов тональной частоты проводных систем связи [10, 11] (18 полезных частотных составляющих с номерами: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 20, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 34, где первая гармоника соответствует частоте 100 Гц, а 34-я – 3400 Гц). При δ_{max} = 0,2% и A_k = 1 получим N = 372. Если в сигнале присутствуют все гармоники – с 1-й по 34-ю, при тех же исходных данных имеем N = 499.

Выводы. В статье поставлена и решена задача оптимального нахождения модуля максимального (минимального) значения ПГС. Предложены аналитические соотношения для расчета оптимального количества точек дискретизации, в которых следует вычислить значение ПГС, в зависимости от спектрального состава и требуемой точности определения МАЗ сигнала.

Дальнейшие исследования планируется направить на разработку метода решения данной задачи с использованием аппроксимации полигармонического сигнала на элементарных участках ортогональными полиномами Лежандра второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чинков В.Н. Основные тенденции развития цифровой измерительной техники // Український метрологічний журнал. – 1996. – № 2 – 3. – С. 27 – 30.*
2. *Чинков В.Н., Крыхтин Ю.А. Метод синтеза полигармонического сигнала с равномерным амплитудным спектром и максимальной полезной мощностью, оптимального по критерию минимаксного значения экстремумов // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – К.: ІПМЕ. – 2004. – Вип. 25. – С. 269 – 274.*
3. *Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 592 с.*
4. *Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. – С.-Пб.: Питер, 2001. – 624 с.*
5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.*
6. *Заездный А.М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – Л.: Энергия, 1972. – 527 с.*
7. *Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.*
8. *Кучук Г.А. Оцінка втрат у системах з обмеженим очікуванням // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 4. – С. 133 – 137.*
9. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832 с.*
10. *Нормы на электрические параметры каналов тональной частоты и внутризоновых первичных сетей. – М.: Радио и связь, 1983. – 56 с.*
11. *Минц М.Я., Чинков В.Н. Оптимизация измерительного сигнала для эксплуатационного контроля систем передачи информации и связи // Измерительная техника. – 1994. – № 5. – С. 52 – 55.*

Поступила 7.02.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Ю.В. Стасев,
Харьковский университет Воздушных Сил.