

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА НАЗНАЧЕНИЯ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕГО ЦЕЛЕВУЮ ФУНКЦИЮ ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦАХ ЭФФЕКТИВНОСТИ

С.Н. Пискунов, В.М. Решетник, И.Ф. Цапков

(Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков)

Предложены метод и алгоритм нахождения квазиоптимального плана назначения при прямоугольных матрицах эффективности. Разработанный алгоритм позволяет существенно снизить затраты времени и памяти ЭВМ на его реализацию по сравнению с оптимальными методами.

квазиоптимальный план назначения, матрицах эффективности

Постановка задачи. В [1], [3] задача нахождения оптимального назначения сформулирована следующим образом: найти набор параметров назначения $\{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, максимизирующий показатель эффективности (ПЭ)

$$M(X) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m Q_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й исполнитель назначен для} \\ & \text{выполнения } j\text{-й работы;} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4)$$

где $Q_{ij} = V_j P_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, V_j – важность j -й работы, $V_j > 0$; P_{ij} – эффективность выполнения j -й работы i -м исполнителем, $P_{ij} \geq 0$; m, n – количество исполнителей и работ соответственно.

Для нахождения оптимального плана назначения, как правило, используют венгерский метод [1], [3]. Венгерским методом получают оптимальный план назначения, минимизирующий ПЭ (1) при квадратной матрице эффективностей (МЭ) $\|Q_{ij}\|$, ($m = n$). Поэтому задачу максими-

зации предварительно трансформируют в задачу минимизации; если $m \neq n$, то матрицу эффективности расширяют до квадратной. С этой целью могут вводиться фиктивные работы или фиктивные исполнители, для которых $Q_{ij} = 0$.

Алгоритмы нахождения оптимальных планов сложны [2], [3]. Для их реализации на ЭВМ в реальном масштабе времени требуются значительные затраты времени и объема памяти. **Целью статьи** является разработка более простых в реализации, но эффективных методов и алгоритмов решения задачи назначения при прямоугольных матрицах эффективности.

Постановку задачи нахождения квазиоптимального (близкого по эффективности к оптимальному) плана назначения сформулируем следующим образом:

найти набор параметров назначения $\{x_{ij}\}$, максимизирующий ПЭ (целевую функцию (ЦФ)) (1), и удовлетворяющий следующим системам ограничений:

при $m = n$: (2), (3), (4);

при $m < n$: (2), (4),

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5)$$

при $m > n$: (3), (4),

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

При описании метода и алгоритма воспользуемся отдельными результатами, изложенными авторами в [2], применительно к задаче назначения.

Метод и алгоритм нахождения квазиоптимального плана назначения. При нахождении плана назначения с использованием предлагаемого метода выполняется предварительный этап и не более чем $(m - 1)$ последовательно повторяющихся итераций. Опишем содержание операций для случаев $m = n$; $m < n$, а затем покажем особенности решения задачи при $m > n$.

На предварительном этапе находим максимальные элементы строк матрицы эффективности

$$Q_{ik} = \max_{1 \leq j \leq n} Q_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где k – номер столбца, которому принадлежит максимальный элемент i -й строки, а элементы

$$Q_{ik} \geq Q_{ij}; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq k; \quad k \in N, \quad (8)$$

где N – множество номеров столбцов матрицы эффективности.

Максимальные элементы строк МЭ для наглядности отмечаем знаком (*). Если число столбцов с элементами Q_{ij}^* , которые обозначим "b", будет равно пороговому значению

$$b = b_{\Pi}, \quad (9)$$

$$\text{где} \quad b_{\Pi} = \min(m, n), \quad (10)$$

то параметры назначения, координаты которых соответствуют координатам Q_{ij}^* , будут равны единице. Для параметров назначения выполняются ограничения (2), (4), (5). Следовательно, при $m \leq n$ решение в этом случае найдено на предварительном этапе, а найденный план назначения $x_{ij}^* = 1$ будет оптимальным [2], что может быть подтверждено путем эквивалентных преобразований. Найденный план назначения максимизирует ПЭ (1), так как выполняется условие (8). Если число столбцов "b" с элементами Q_{ij}^* меньше порогового значения (9) (для $m \leq n$ величина $b_{\Pi} = m$ (10)), то в некоторых столбцах будут находиться несколько элементов Q_{ij}^* , отдельные же столбцы останутся без таких элементов. Поэтому необходимо выполнить не более $(m - 1)$ итераций, при которых максимальные элементы строк заменяются либо равными им (выполняется условие $Q_{ik} = Q_{ij}$, $k \neq j$ (8)), либо наиболее близкими по величине элементами строк.

Для поиска координат элемента $Q_{i_0j_0}$, который заменит Q_{ik} , используем величину $\delta_{i_0j_0}$, вычисляемую по следующему правилу:

$$\delta_{i_0j_0} = \min_{k \in L_2} \{ \min_{i \in R_k} \{ \min_{l \in L_0} \{ Q_{ik} - Q_{il} \} \} \}, \quad (11)$$

где Q_{ik} – максимальный элемент i -й строки (7), находящийся в k -м столбце множества L_2 ; l – номера столбцов множества L_0 ; L_2 – множество столбцов, содержащих более одного элемента Q_{ik} , $k \in L_2$ (число элементов в k -м столбце обозначим q_k , столбцы множества L_2 выделим знаком (+)); R_k – множество номеров строк, максимальные элементы которых попали в столбцы множества L_2 ($k \in L_2$) (строки множества R_k выделим знаком (+)); L_0 – множество столбцов без максимальных элементов строк (столбцы множества L_0 выделим знаком (-)); i_0, j_0 – координаты элемента Q_{ij} наиболее близкого по величине к максимальному элементу i_0 -й строки.

Элементы $Q_{i_0j_0}$ выделяем знаками: (*) при $\delta_{i_0j_0} = 0$, (\otimes) при $\delta_{i_0j_0} \neq 0$. Элемент, выделенный \otimes , будем называть квазимаксимальным элементом i_0 -й строки. Операция (11) выполняется только для тех столбцов, в которых находятся не менее двух элементов Q_{ij}^* (множество L_2), при наличии номеров столбцов множества L_0 .

На предварительном этапе или в ходе выполнения итераций из процесса распределения будем исключать столбцы (соответственно и строки), в которых находится по одному элементу отмеченному знаком (*) или (\otimes). Такие столбцы образуют множество L_1 .

Если $b = b_n$ при $m \leq n$, то процесс выполнения итераций завершается. В этом случае множество L_2 будет пустым, а число столбцов с максимальными и квазимаксимальными элементами станет равным m . При $m = n$ множество L_0 будет пустым, а при $m < n$ множество L_0 может содержать несколько столбцов. По координатам максимальных и квазимаксимальных элементов определяем координаты плана назначения

$$x_{ij}^* = 1; i = 1, 2, \dots, m; j \in L_1.$$

При $m > n$ величина $b_n = n$. Если $b = n$, то в отдельных столбцах будут находиться несколько элементов Q_{ij}^* . Следовательно, не будут выполняться все ограничения (3). Необходимо прекратить выполнение итераций и добиться выполнения ограничений (3) на завершающем этапе формирования плана назначения. Для всех столбцов множества L_2 из максимальных элементов строк выбираем наибольшее значение

$$Q_{i_0k}^* = \max_{i \in R_k} Q_{ik}^*; k \in L_2. \quad (12)$$

У всех остальных элементов этих столбцов стираем знаки выделения, формируем план назначения, при необходимости формируем множество "свободных" исполнителей работ и множество работ, на которые не назначены исполнители.

При $m > n$ стремление получить лучший план назначения за счет расширения МЭ до квадратной и использования метода в полном объеме при $m = n$ не приводит к положительному эффекту, так как результаты получаются тождественными.

Схема алгоритма, соответствующая изложенному методу, изображена на рис. 1. Используя схему алгоритма и его описание для иллюстрации метода при $m < n$ и $m > n$, приведем примеры.

Пример 1. Найти квазиоптимальный план назначения, максимизирующий ПЭ (1), удовлетворяющий ограничениям (2),(4), (5), если матрица эффективности имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,75 & 0,80 & 0,70 & 0,10 \\ 0,30 & 0,35 & 0,40 & 0 & 0,20 \\ 0,20 & 0,50 & 0,55 & 0 & 0,10 \\ 0,30 & 0,15 & 0,60 & 0,40 & 0,15 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

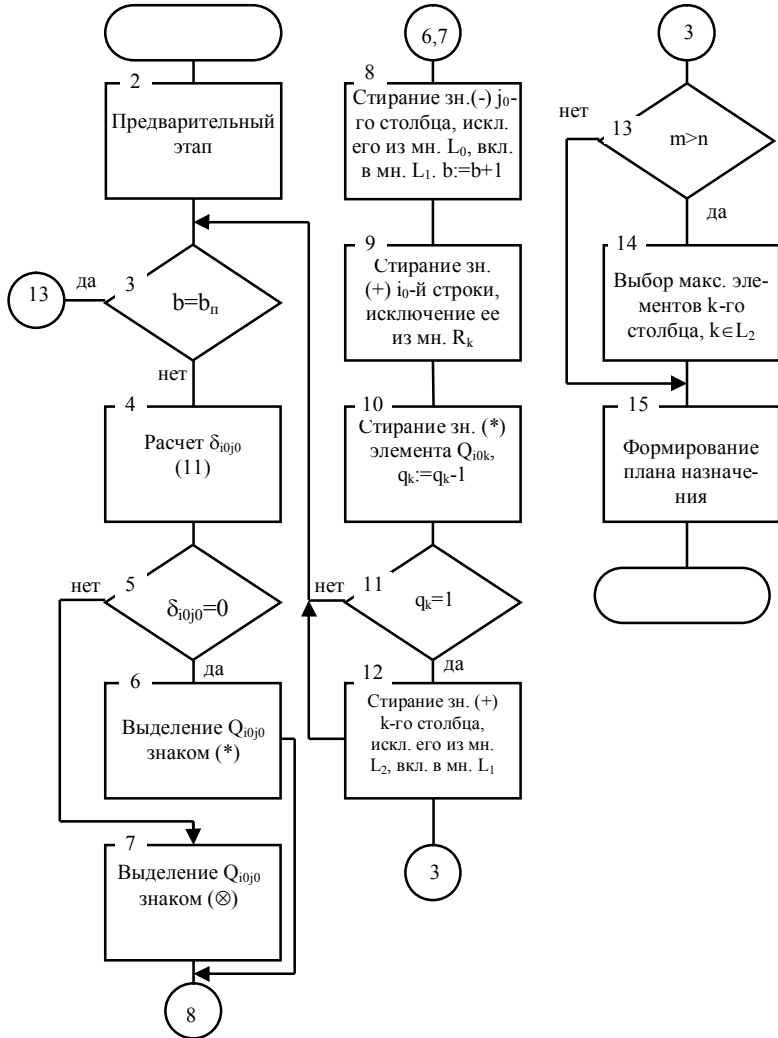


Рис. 1. Схема алгоритма нахождения квазиоптимального плана назначения

Решение. После выполнения предварительного этапа, получим

$$Q = \begin{vmatrix} - & - & + & - & - \\ 0,55 & 0,75 & 0,80^* & 0,70 & 0,10 \\ 0,30 & 0,35 & 0,40^* & 0 & 0,20 \\ 0,20 & 0,50 & 0,55^* & 0 & 0,10 \\ 0,30 & 0,15 & 0,60^* & 0,40 & 0,15 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \quad (14)$$

$L_0 = \{1; 2; 4; 5\}; L_1 = 0; L_2 = \{3\}; R_3 = \{1; 2; 3; 4\}; b_n = \min\{4; 5\} = 4; b = 1.$

Так как $b < b_n$, то выполнив три итерации (блоки 3; 4; ... ; 12), получим $\delta_{12} = 0,05; Q^{\otimes}_{12} = 0,75; \delta_{21} = 0,10; Q^{\otimes}_{21} = 0,30; \delta_{44} = 0,20; Q^{\otimes}_{44} = 0,40; L_1 = \{1; 2; 3; 4\}; L_0 = \{5\}; L_2 = 0; b = 4; b = b_n.$

Матрица (14) примет вид

$$Q = \begin{vmatrix} 0,55 & 0,75^{\otimes} & 0,80 & 0,70 & 0,10 \\ 0,30^{\otimes} & 0,35 & 0,40 & 0 & 0,20 \\ 0,20 & 0,50 & 0,55^* & 0 & 0,10 \\ 0,30 & 0,15 & 0,60 & 0,40^{\otimes} & 0,15 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

По координатам элементов матрицы (15), выделенных знаками (*) и (\otimes), определяем квазиоптимальный план назначения $x^*_{12} = 1; x^*_{21} = 1; x^*_{33} = 1; x^*_{44} = 1;$ и рассчитываем значение ПЭ (1)

$$M(x_{k0}) = 0,75 + 0,30 + 0,55 + 0,40 = 2,00 \text{ ед.}$$

Так как $m < n$, то на пятую работу исполнители не будут назначены.

При использовании оптимальных методов [2], [3], получим

$$X_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Значение ПЭ (1) при оптимальном плане назначения будет равно

$$M(X_0) = 0,70 + 0,30 + 0,50 + 0,60 = 2,10 \text{ ед.}$$

Значение ПЭ при квазиоптимальном плане назначения несколько меньше, чем при оптимальном плане назначения.

Пример 2. Решить задачу, если $m > n$ и МЭ имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

В этом случае план назначения должен удовлетворять ограничениям (3), (4), (6).

Решение. После выполнения предварительного этапа получим

$$Q = \begin{pmatrix} + & + & - \\ 9^* & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8^* & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9^* & 4 \\ 2 & 7^* & 3 & 1 \\ 1^* & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}; \quad (17)$$

$L_0 = \{4\}$; $L_1 = \{3\}$; $L_2 = \{1; 2\}$; $R_1 = \{1; 5\}$; $R_2 = \{2; 4\}$; $b_n = \min(5; 4) = 4$; $b = 3$.

Так как $b < b_n$, то выполнив одну итерацию (блоки 3; 4; ... ; 12), получим $\delta_{54} = 0$; $Q^*_{54} = 1$; $L_1 = \{1; 3; 4\}$; $L_0 = 0$; $L_2 = \{2\}$.

Матрица (17) примет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 9^* & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8^* & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9^* & 4 \\ 2 & 7^* & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1^* \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Так как $b = b_n$ (блок 3), $m > n$ (блок 13), то найдем наибольший элемент среди максимальных элементов второго столбца (блок 14). МЭ (18) примет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 9^* & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8^* & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9^* & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1^* \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Квазиоптимальный план назначения, соответствующий МЭ (19) $x^*_{11} = 1$; $x^*_{22} = 1$; $x^*_{33} = 1$; $x^*_{54} = 1$; четвертый исполнитель не назначен ни на одну из работ. Значение ПЭ будет равно

$$M(x_{k0}) = 9 + 8 + 9 + 1 = 27 \text{ ед.}$$

При использовании оптимального метода получим

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение ПЭ при оптимальном плане назначения будет равно

$$M(X_0) = 8 + 4 + 9 + 7 = 28 \text{ ед.}$$

Как и ранее выполняется условие

$$M(X_{k0}) < M(X_0).$$

Таким образом, значения ПЭ при квазиоптимальном и оптимальном планах назначения, как правило, будут незначительно отличаться друг от друга. В отдельных случаях они будут совпадать.

Выводы. Алгоритм отличается простотой нахождения элементов матрицы эффективности, наиболее близких по величине к максимальному элементу строки. Он состоит из предварительного этапа, ограниченного числа последовательно повторяющихся итераций, заключительного этапа формирования плана назначения.

В предложенном методе задача максимизации предварительно не преобразуется в задачу минимизации, а прямоугольная матрица эффективности не расширяется до квадратной. Алгоритм может быть использован при распределении средств, если математическая постановка задачи совпадает с изложенной в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. *Задачи и методы линейного программирования.* – М.: Сов. радио, 1961. – 365 с.
2. Гомозов А.В., Михайлутин О.М., Пискунов С.Н., Цапков И.Ф. *Об алгоритме нахождения оптимального плана распределения средств по целям // Збірник наукових праць.* – Х.:ХАІ. – 2002. – Вип. 29. – С. 194 – 198.
3. Раскин Л.Г. *Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления.* – М.: Сов. радио, 1976. – 343 с.

Поступила 12.03.2005

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил.