УДК 621.396.67.001.24:778.38

ЦИФРОВОЕ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАДИОИЗОБРАЖЕНИЙ

Е.Д. Прилепский
(Харьковский университет Воздушных Сил)

Рассмотрен линейный метод восстановления непрерывного радиоизображения, измеренного в конечном числе точек. Показано, что дискретизация радиоизображения приводит к регуляризации решения задачи восстановления.

непрерывное радиоизображение, регуляризованное восстановление

Постановка проблемы и анализ литературы. С развитием систем радиовидения возрастает роль цифровых методов восстановления радиоизображений при их реализации с использованием мощных вычислительных комплексов [1 – 4]. Однако в известных работах по восстановлению радиоизображений не учитываются в полной мере условия получения радиоизображений. **Целью настоящей статьи** является развитие линейного регуляризированного метода восстановления радиоизображения, органично связанного с условиями его получения.

Основные соотношения и формулировки. Процесс измерения радиоизображения может быть описан как процедура его дискретизации, при которой получается система N уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{r}, \vec{r}_i') \, g(\vec{r}) \, d\vec{r} = f(\vec{r}_i'), \quad \vec{r}_i' \in D, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где N – число точек дискретизации; $S(\vec{r}, \vec{r}')$ – импульсный отклик измерительной системы (диаграмма направленности (ДН)); D – область определения радиоизображения; $\vec{r}_i'$ – точки дискретизации искаженного радиоизображения $f(\vec{r}')$; $g(\vec{r})$ – неискаженное радиоизображение.

Введем обозначения $f(\vec{r}_i') = f_i$, $S(\vec{r}, \vec{r}_i') = S_i(\vec{r})$. Будем считать систему функций $\{S_i(\vec{r})\}$ линейно независимой. Под восстановленным радиоизображением будем понимать восстановленный образ $\hat{g}(\vec{r})$ исходного неискаженного радиоизображения $g(\vec{r})$, полученный с помощью цифрового процессора (либо другого устройства обработки информации) в результате обработки измеренных данных $\{f_i\}$.

Ввиду линейности процедуры (1) формирования $\{f_i\}$ восстановленное радиоизображение целесообразно искать в виде линейного преобразования

$$\hat{g}(\vec{r}) = \hat{Q}(\vec{r})f \,, \tag{2}$$

где $\hat{Q}(\vec{r})$ – восстанавливающий оператор (матричная функция).

Величину $\hat{g}(\vec{r})$ можно представить как линейную оболочку

$$\hat{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i S_i(\vec{r}) \,. \tag{3}$$

Для определения коэффициентов $\{q_i\}$ подставим (3) в (1) и, обозначив

$$K_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(\vec{r})\, S_n(\vec{r}) d\vec{r} \,, \tag{4}$$

приходим к системе линейных уравнений для $\{q_n\}$

$$\sum_{i=1}^{N} K_{in} q_n = f_i \,, \quad i = \overline{1, N} \,. \tag{5}$$

Поскольку функции $\{S_i(\vec{r})\}$ линейно независимы, то определитель Грамма $\det\|K_{in}\| \neq 0$ и, следовательно, система уравнений (5) имеет единственное решение, которое имеет вид:

$$q_n = \sum_{i=1}^{N} K_{ni}^{-1} f_i \,, \qquad n = \overline{1, N} \,, \tag{6}$$

где $\left\|K_{ni}^{-1}\right\|$ – матрица, обратная $\|K_{in}\|$. Удобно представить решение (6) через собственные векторы $\left\{\nu_n^{(k)}\right\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ матрицы $\|K_{in}\|$, которые определяются из системы уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} K_{in} \nu_n^{(k)} = \lambda_k \nu_i^{(k)} \,, \qquad i = \overline{1, N}, \; k = \overline{1, N} \,. \tag{7}$$

Здесь индекс k нумерует собственные векторы и собственные значения. Собственные векторы образуют ортогональный базис (будем считать эти векторы нормированными), так что

$$\sum_{n=1}^{N} \nu_n^{(k)} \nu_n^{(\ell)} = \delta_{k\ell} \,; \quad \sum_{k=1}^{N} \nu_n^{(k)} \nu_m^{(k)} = \delta_{nm} \,. \tag{8}$$

Разложим векторы $\{q_n\}$ и $\{f_i\}$ по собственным векторам и с учетом соотношений (5), (7) получим

$$q_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} \nu_n^{(k)} \nu_i^{(k)} f_i \,. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (3), получим для восстановленного радиоизображения

$$\hat{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(\vec{r})\, f_i \,, \tag{10}$$

где
$$Q_i(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} \nu_i^{(k)} \nu_n^{(k)} S_n(\vec{r}), \quad i = \overline{1, N} \; - \tag{11}$$

восстанавливающий оператор.

Выпишем в явном виде оператор $\hat{L}$, преобразующий неискаженное радиоизображение $g(\vec{r})$ в восстановленное $\hat{g}(\vec{r})$: $\hat{g} = \hat{L} g$. Из (9) и (1):

$$\hat{g}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\vec{r}, \vec{r}')\, g(\vec{r}')\, d\vec{r}' , \tag{12}$$

где ядро интегрального оператора:

$$L(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} \psi^{(k)}(\vec{r})\, \psi^{*(k)}(\vec{r}'); \qquad \psi^{(k)}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N} \nu_n^{(k)} S_n(\vec{r}) . \tag{13}$$

Таким образом, восстановленное радиоизображение $\hat{g}(\vec{r})$ является интегральной (сглаженной) версией исходного радиоизображения $g(\vec{r})$. Ядро $L(\vec{r}, \vec{r}')$ играет при этом роль «аппаратной функции».

Погрешность восстановления радиоизображения. При наличии случайных аддитивных ошибок измерений $\{n_i\}$, когда в результате измерений радиоизображения получается $\{\tilde{f}_i = f_i + n_i\}$, появляется случайная ошибка восстановления $\Delta\hat{g}(\vec{r})$. Среднеквадратическое значение ошибки, усредненное по ансамблю

$$\varepsilon_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \Delta\hat{g}^2(\vec{r}) \right\rangle d\vec{r} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \lambda_k^{-1} R_{mn} \nu_m^{(k)} \nu_n^{(k)} , \tag{14}$$

где $R_{mn} = \langle n_m m_n \rangle$ – коэффициент корреляции ошибки. В частности, для некоррелированной стационарной ошибки $R_{mn} = \sigma^2 \delta_{mn}$, $\sigma^2 = \langle n_k^2 \rangle$ – дисперсия ошибки, получим для погрешности

$$\varepsilon_1^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} . \tag{15}$$

Анализ показывает, что данная погрешность восстановления оказывается однозначно связанной с интервалом дискретизации в уравнении (1) и при его уменьшении она растет. Имеется еще одна составляющая погрешности восстановления, также связанная с интервалом дискретизации. Назовем ее методической погрешностью ($\|g\|$ – норма g):

$$\varepsilon_2^2 = \left\| g - \hat{g} \right\|^2, \quad (16)$$

С увеличением интервала дискретизации уменьшается число степеней свободы в радиоизображении, что приводит к утере информации о мелких деталях. Таким образом, при уменьшении интервала дискретизации методическая погрешность ε_2^2 уменьшается, погрешность ε_1^2, обусловленная шумом, растет. Другими словами, интервал дискредитации играет роль естественного параметра регуляризации задачи восстановления радиоизображения. Следовательно, для каждого класса радиоизображений при заданном уровне шума и априорной информации о ДН может быть определен оптимальный интервал дискретизации. Для этого можно использовать критерий минимума одной составляющей погрешности при заданном уровне другой, либо критерий минимума суммарной погрешности, либо информационный критерий (например, максимум информации об $g(\vec{r})$, которую можно получить по $\{f_i\}$).

Выводы. В рамках линейных матричных методов восстановления радиоизображений существует возможность получения регуляризированного решения за счет дискретизации радиоизображения. С другой стороны различные способы регистрации радиоизображения связаны в конечном счете с его дискретизацией. Параметр регуляции имеет в данном случае четкий физический смысл – шаг дискретизации, а не подбирается из различных эвристических соображений [2]. Процедура обработки является устойчивой к аддитивным погрешностям измерений радиоизображений и соответствует специфике и тенденциям использования современных высокопроизводительных матричных процессоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.*
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.*
3. *Обработка изображений и цифровая фильтрация: пер. с англ. / Под ред. Т. Хунга. – М.: Мир, 1979. – 318 с.*
4. *Минц М.Я., Прилепский Е.Д. Применение дискретизации изображения к решению задач восстановления объекта // Оптика и спектроскопия. – 1993. – Т. 75, вып. 3. – С. 696 – 701.*

Поступила 14.03.2005

Рецензент: доктор технических наук профессор А.И. Стрелков, Харьковский университет Воздушных Сил.