

**ПРО ОДИН НОВИЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ  
ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗВИЧАЙНИМ ЛІНІЙНИМ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ**

О.М. Литвин, Г.А. Чаусова  
(Українська інженерно-педагогічна академія, Харків)

*Пропонується новий метод розв'язання задачі оптимального керування звичайним диференціальним рівнянням. Вважається заданою початкова умова. Крім того і розв'язок рівняння та оптимальне управління мінімізують заданий квадратичний функціонал. Метод розв'язання полягає в заміні поставленої задачі задачею мінімізації деякого функціонала.*

*звичайне диференціальне рівняння, квадратичний функціонал*

**Постановка задачі.** В даній роботі пропонується новий метод наближеного розв'язання наступної задачі: знайти  $y(t)$ ,  $u(t)$ , якщо

$$y' = ay(t) + bu(t) + f(t), \quad 0 < t < 1; \quad (1)$$

$$y(0) = y_0; \quad (2)$$

$$J(y, u) = \int_0^T [\beta_1 y^2(t) + \beta_2 u^2(t)] dt \rightarrow \min, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1. \quad (3)$$

Метод оснований на наступних твердженнях:

**Лема 1** [1]. Норма оператора  $S_m : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , який ставить у відповідність кожній неперервній функції  $f(t) \in C(I)$ ,  $I = [0, 1]$  сплайн

$$S_m(x) = S_m(x, C) := C_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad k = \overline{0, m-1} \quad z$$

$m+1$  різними вузлами  $x_k$ ,  $k = \overline{0, m}$ , задовольняє співвідношення  $\|A_m f\|_\infty \leq 3 \|f\|_\infty$ , якщо коефіцієнти  $C_k$ ,  $k = \overline{0, m}$  сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\int_0^1 (f(t) - S_m^*(t))^2 dt = \min_C \int_0^1 (f(t) - S_m(t))^2 dt.$$

**Лема 2** [2]. Хай  $x_i = i/m$ ,  $i = \overline{0, m}$ , сталі  $C_i$ ,  $i = \overline{0, m}$  в операторі

$$S_m f(x) = \sum_{i=0}^m C_i h_i(x) = \Phi_m^T(x) C, \quad C = [C_0, \dots, C_m]^T;$$

$$\varphi_m^T(x) = [h_0(x), \dots, h_m(x)], \quad h_i(x) = h(mx - i), \quad i = \overline{0, m}; \quad h(t) = \frac{1}{2} [ |t-1| - 2|t| + |t+1| ],$$

знаходяться з умови

$$J_m(C) = \sum_{p=0}^1 \int_0^1 \left[ \frac{d^p}{dx^p} (f(x) - \varphi_m^T(x)C) \right]^2 dx \rightarrow \min_C. \quad (4)$$

$$\text{Тоді} \quad C = H_m^{-1}F, \quad (5)$$

$$\text{де} \quad H_m = \sum_{q=0}^1 \int_0^1 \varphi_m^{(q)}(x) \left( \varphi_m^{(q)}(x) \right)^T dx; \quad F = \sum_{q=0}^1 \int_0^1 \varphi_m^{(q)}(x) \frac{d^q}{dx^q} f(x) dx.$$

**Твердження 1** [2]. Якщо  $\psi(x) = \varphi_m^T(x)C$  – сплайн 1-го степеня з властивостями  $\|f(\cdot) - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(I)} = \inf_C \|f(\cdot) - \varphi_m^T(\cdot)C\|_{W_2^1(I)}$ , то

$$\|\psi\|_{\infty} \leq \lceil f \rceil + \frac{1}{2m} \|f'\|_{\infty}, \quad \lceil f \rceil := \max_{0 \leq k \leq m} \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right|. \quad (6)$$

В наступній теоремі наводиться явний вигляд функції, яка у нерівності (6) забезпечує знак рівності.

**Твердження 2** [2]. Для функції  $S_0(x)$ , яка є сплайном першого степеня з вузлами  $\xi_k = \frac{(k+0,5)}{m}$ ,  $k = \overline{0, m-1}$  і з властивостями  $S_0\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ ,  $k = \overline{0, m}$ ;  $|S_0'(x)| = 1$  у теоремі 1 виконується знак рівності.

**Теорема 1.** Якщо шукати наближення розв'язки задачі (1) – (2) у вигляді сплайна 1-го порядку

$$y_n(t) = y_0 h(nt) + \sum_{k=1}^n y_k h(nt - k + 1), \quad (7)$$

коефіцієнти  $y_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  якого знаходяться з умови

$$J_2(y_n) = \int_0^1 [y_n' - ay_n - f(t) - bu(t)]^2 dt + \int_0^1 \left[ y_n(t) - a \int_0^t y_n(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \int_0^t u(\tau) d\tau \right]^2 dt \rightarrow \min_{y_1, u_1},$$

то можна стверджувати, що  $\max |y(t) - y_n(t)| \rightarrow 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Цей факт взятий нами за основу при побудові методу наближеного розв'язання задачі (1) – (3). Метод полягає в тому, що цю задачу заміною

змінної завжди можна звести до задачі, у якій  $T=1$ . Тому вважаємо, що  $T=1$ . Задачу (1) – (3) при  $T=1$  замінімо задачею

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u, y) = & \int_0^T [y' - ay - f(t) - bu(t)]^2 dt + \\ & + \int_0^T \left[ y(t) - y_0 - a \int_0^t y(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \int_0^t u(\tau) d\tau \right]^2 dt + \\ & + \gamma \int_0^T [\beta_1 y^2(t) + \beta_2 u^2(t)] dt, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\gamma$  – деякий множник.

$$\text{Хай } H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t < 1; \\ \frac{1}{2}, & t = T; \\ 0, & t > 1; \end{cases} \quad h(t) = \frac{1}{2} [|t+1| - 2|t| + |t-1|] = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \quad t \geq 1; \\ 1+t, & -1 < t \leq 0; \\ 1-t, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Будемо знаходити невідомі функції  $y(t)$ ,  $u(t)$  у вигляді

$$y_n(t) = y_0 h(nt) + \sum_{k=1}^n y_k h(nt - k + 1); \quad (9)$$

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n U_k H(nt - k). \quad (10)$$

Зауважимо, що  $\text{Supp } h(t) = (-1, 1)$ ;  $\text{Supp } H(t) = [0, 1]$ .

Тому  $\text{Supp } (nt - k) = D_k = \{-1 < nt - k < 1\} = \left\{ \frac{k-1}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} \right\}$ ;

$$\text{Supp } H(nt - k) = \tilde{D}_k = \{0 \leq nt - k < 1\} = \left\{ \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} \right\}.$$

Тобто формули (5), (6) можна записувати також в іншій формі:

$$\begin{aligned} y_n(t) = & (k+1 - nt)y_k + (nt - k)y_{k+1}; \\ & \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}; \quad \overline{k=0, n-1}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$u_n(t) = U_k; \quad \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}; \quad \overline{k=0, n-1}. \quad (12)$$

Підставляючи формули (5), (6) у функціонал (4), отримаємо

$$\left( Y = [y_1, \dots, y_n]^T, \quad U = [U_1, \dots, U_n]^T \right):$$

$$\begin{aligned}
J(Y, U) = & \int_0^T \left\{ y_0 \left[ (h(nt))'_t - ah(nt) \right] + \sum_{k=1}^n y_k \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] - f(t) - \right. \\
& \left. - b \sum_{k=1}^n U_k H(nt-k) \right\}^2 dt + \int_0^T \left\{ y_0 \left( h(nt) - 1 - a \int_0^t h(n\tau) d\tau \right) + \sum_{k=1}^n y_k \left[ h(nt-k) - \right. \right. \\
& \left. \left. - a \int_0^t h(nt-\tau) d\tau \right] - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \int_0^t \sum_{k=1}^n U_k H(n\tau-k) d\tau \right\}^2 dt + \int_0^T \left[ \beta_1 \left( \sum_{k=0}^n y_k h(nt-k) \right)^2 + \right. \\
& \left. + \beta_2 \left( \sum_{k=1}^n U_k H(nt-k) \right)^2 \right] dt \rightarrow \min_{Y, U}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Прирівнюючи частинні похідні функціонала (13) по невідомим  $y_k, U_k, k = \overline{1, n}$  до нуля, отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(Y, U)}{\partial y_p} = 0: & \int_0^T \left[ y_0 \left[ (h(nt))'_t - ah(nt) \right] + \sum_{k=1}^n y_k \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] - f(t) - \right. \\
& \left. - b \sum_{k=1}^n u_k H(nt-k) \right] \cdot \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt + \int_0^T \left[ y_0 \left( h(nt) - 1 - a \int_0^t h(n\tau) d\tau \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^n y_k \left( h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right) - \int_0^t f(\tau) d\tau - b \sum_{k=1}^n u_k \int_0^t H(n\tau-k) d\tau \right] \times \\
& \left[ h(nt-p) - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt + \beta_1 \int_0^T \sum_{k=0}^n y_k h(nt-k) \cdot h(nt-p) dt = 0, \\
& p = \overline{1, n}; \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(Y, U)}{\partial U_p} = 0: & \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} \left\{ \sum_{k=p}^{p+1} y_k \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] - f(t) - bu_p \right\} \times h(nt-k) \times \\
& \times (-b) dt + \int_{\frac{(p-1)}{n}}^{\frac{p}{n}} \left\{ \sum_{k=p}^{p+1} y_k \left[ h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right] - \right. \\
& \left. - \int_0^t f(\tau) d\tau - bu_p \int_0^t H(n\tau+1-p) d\tau \right\} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left( -b \int_0^t H(n\tau - p) \right) dt + \beta_2 U_p \int_0^{\frac{p}{n}} dt = 0, \quad p = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Введемо позначення:  $HH_{k,p} = \int_0^t h(nt-k) \cdot h(nt-p) dt$ ;

$$A_{pk} = \int_0^T \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] \cdot \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt;$$

$$B_{pk} = \int_0^T \left[ (h(nt-k)) - a \int_0^t h(n\tau - k) d\tau \right] \cdot \left[ h(nt-p) - a \int_0^t h(n\tau - p) d\tau \right] dt ;$$

$$C_{pk} = \int_0^T H(nt-k) \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt;$$

$$D_{kp} = \int_0^T \left( \int_0^t H(n\tau - k) d\tau \right) \cdot \left[ h(nt-p)'_t - a \int_0^t h(n\tau - p) d\tau \right] dt.$$

Тоді систему (14) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n A_{pk} y_k - b \sum_{k=1}^n C_{pk} U_k + \sum_{k=1}^n B_{pk} y_k - b \sum_{k=1}^n D_{pk} U_k + \beta_1 \sum_{k=0}^n HH_{pk} y_k = \\ & = -y_0 \int_0^T \left[ h(nt)'_t - ah(nt) \right] \cdot \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt + \\ & + \int_0^T f(t) \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt - y_0 \int_0^T \left[ h(nt)'_t - a \int_0^t h(n\tau) d\tau \right] \times \\ & \times \left[ (h(nt-p))'_t - a \int_0^t h(n\tau - p) d\tau \right] dt + \int_0^T \left( \int_0^t f(\tau) \right) \left[ h(nt-p) - \right. \\ & \left. - a \int_0^t h(n\tau - p) d\tau \right] dt, \quad p = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Систему (15) можна записати у вигляді:

$$-b \sum_{k=p}^{p+1} y_k \int_{p/n}^{(p+1)/n} \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) \right] dt + b \int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t) dt + b^2 U_p \frac{1}{n} +$$

$$\begin{aligned}
& + (-b) \sum_{k=p}^n y_k \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{(p+1)}{n}} \left[ h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right] dt + \\
& + b \int_{\frac{p}{n}}^T \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt + b^2 U_p \int_{\frac{p}{n}}^T \int_0^t H(n\tau-p) d\tau dt + \beta_2 \frac{U_p}{n} = 0, \quad p = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Перепишемо ці системи у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n (A_{pk} + B_{pk}) y_k - b \sum_{k=1}^n (C_{pk} + D_{pk}) U_k = -y_0 \int_0^{1/n} \left[ (h(nt))' \times \right. \\
& \times \left. \left[ (h(nt-p))'_t - ah(nt-p) \right] dt + \int_0^{1/n} \left[ (h(nt-p))'_t - a \int_0^t h(n\tau-p) d\tau \right] dt - \right. \\
& \left. - b \sum_{k=p}^{p+1} y_k \int_{\frac{p}{n}}^T \left[ (h(nt-k))'_t - ah(nt-k) + h(nt-k) - a \int_0^t h(n\tau-k) d\tau \right] dt + \right. \\
& \left. + b \left[ \int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t) dt - \int_{p/n}^T \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt + b^2 U_p \left( \frac{1}{n} + \int_{p/n}^T \int_0^t H(n\tau-p) d\tau dt \right) \right] + \right. \\
& \left. + \beta_2 \frac{U_p}{n} = b \int_{\frac{p}{n}}^T \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt + b \int_{p/n}^{(p+1)/n} f(t) dt, \quad p = \overline{1, n}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Розв'язок цих систем підставляємо у (9) – (10). Це і буде шуканий наближений розв'язок задачі (1) – (3).

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ciesielsky Z. *Properties of the orthonormal Franklin systems* // *Studia mathematica*, 23. – 1963. – № 2. – P. 141 – 157.
2. Литвин О.М. *Про оцінку похибки наближення диференційованих функцій лінійними сплайнами в нормі  $W_2^1(1), I=[0,1]$*  // *Доповіді Академії Наук України*. – 2004. – № 11. – С. 33 – 39.

Надійшла 23.03.2005

**Рецензент:** доктор фізико-математичних наук професор А.О. Александрова, Харківський університет Повітряних Сил.