

## **МЕТОДИКА ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАЕКТОРИЙ РАДИОВОЛН В МОРСКОМ ТРОПОСФЕРНОМ ВОЛНОВОДЕ**

А.В. Полярус, В.Л. Мисайлов  
(Харьковский университет Воздушных Сил)

*Проведено исследование устойчивости траекторий радиоволн в морском тропосферном волноводе (ТВВ). С использованием критерия устойчивости динамических систем Бендиксона разработана методика нахождения интервалов высот, на которых возможна локация низколетающих целей в морском ТВВ на загоризонтной дальности.*

***устойчивость траекторий радиоволн, морской тропосферный волновод, критерия устойчивости динамических систем Бендиксона***

**Постановка проблемы.** Как известно [1, 2], дальность обнаружения маловысотных целей во многом определяется условиями распространения радиоволн. При этом отклонение рефракции от нормальной может как снижать, так и значительно увеличивать дальность действия РЛС [1]. Повышение дальности обнаружения маловысотных целей над поверхностью моря обычно связано с образованием тропосферных волноводов (ТВВ) [2]. Хотя исследования волноводного распространения радиоволн ведутся уже более полувека, однако, существующие к настоящему времени системы прогнозирования условий работы радиосредств при наличии ТВВ надежно функционируют лишь при достаточно простых вертикальных профилях коэффициента преломления и отсутствии его горизонтальных градиентов [2, 3], что характерно для акваторий океанов. Радиолокационным станциям, расположенным на морском побережье, и корабельным РЛС при небольшом удалении от берега приходится работать в условиях сложных зависимостей значения коэффициента преломления тропосферы как от вертикальной, так и от горизонтальной координат [1, 4, 5]. В этом случае обычные аналитические методы расчета траекторий и амплитуды радиоволн [6 – 12] имеют малую точность. Применение же численных методов расчета полей в электродинамических граничных задачах (типа FDTD [13]), осложняется их громоздкостью и необходимостью иметь большие вычислительные ресурсы.

**Анализ литературы.** Для ухода от сложностей расчета траекторий радиоволн в реальном пространстве в [14] был предложен, а в [15] получил дальнейшее развитие метод, основанный на использовании уравнений гамильтоновой динамики. Этот метод позволяет рассчитывать тра-

ектории распространения радиоволн в расширенном координатно-импульсном пространстве при любых зависимостях коэффициента преломления тропосферы  $n$  от высоты  $h$  и горизонтальной дальности  $x$ . Однако устойчивость этих траекторий исследована не была.

**Цель статьи.** Целью статьи является разработка методики оценки устойчивости траекторий радиоволн в морском тропосферном волноводе.

**Исследование устойчивости траекторий радиоволн в морском тропосферном волноводе.** Так как при волноводном распространении радиус кривизны траекторий радиоволн равен или меньше радиуса Земли  $a_{\text{зем}}$ , то при использовании уравнений гамильтоновой динамики учет кривизны земной поверхности представляется необходимым. Поэтому нижеследующие расчеты будем проводить для модифицированного коэффициента преломления [4]:

$$m(h, x) = n(h, x) + 1/a_{\text{зем}}.$$

Запишем уравнения луча с помощью гамильтоновского формализма [15]. Пусть ось  $x$  совпадает с осью тропосферного волноводного канала, а траектория луча лежит только в вертикальной плоскости. Тогда координаты луча связаны гамильтоновскими уравнениями [16]:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial H(p, h)}{\partial h}; \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial H(p, h)}{\partial p}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $H(p, h) = -\sqrt{m^2(h) - p^2}$  – гамильтониан;  $p$  – импульс;  $m(h)$  – модифицированный коэффициент преломления;  $h$  – высотная координата.

Найдем производные правых частей системы (1):

$$\frac{\partial H(p, h)}{\partial h} = -\frac{m(h) \frac{dm(h)}{dh}}{\sqrt{m^2(h) - p^2}} = S(p, h); \quad (1, a)$$

$$\frac{\partial H(p, h)}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{m^2(h) - p^2}} = Q(p, h). \quad (1, б)$$

Определим устойчивую точку, то есть такие значения  $p$  и  $h$ , которые мы обозначим как  $p_0$  и  $h_0$ , для которых фазовый поток стационарен, т.е. левые части уравнений (1, а) и (1, б) равны нулю.

Как известно [17], этим условиям может отвечать множество точек  $p_0, h_0$  в зависимости от вида функций (1, а) и (1, б). Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 0 \text{ в двух случаях: 1) производная } \frac{dm(h)}{dh} = 0 \text{ или 2) } p \rightarrow \infty.$$

Из первого условия находим высоту  $h_0$ , в которой производная  $\left. \frac{dm(h)}{dh} \right|_{h_0} = 0$ . Из условия  $\frac{\partial H}{\partial h} = 0$  получаем  $p_0 = 0$ .

Матрица устойчивости  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} f_p(p_0, h_0) & f_h(p_0, h_0) \\ g_p(p_0, h_0) & g_h(p_0, h_0) \end{pmatrix},$$

где  $f_p(p_0, h_0)$ ,  $f_h(p_0, h_0)$ ,  $g_p(p_0, h_0)$ ,  $g_h(p_0, h_0)$  – соответственно частные производные по параметру  $p$  и  $h$  от правой части первого и второго уравнений системы (1) в точке  $p_0, h_0$ .

После определения соответствующих производных получаем искомую матрицу устойчивости

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \left. \frac{d^2 m(h)}{dh^2} \right|_{h=h_0} \\ \frac{1}{m(h_0)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{m(h_0)} \left. \frac{d^2 m(h)}{dh^2} \right|_{h=h_0}}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что эти значения могут быть как действительными, так и мнимыми. Рассмотрим два случая:

$$1) \text{ Если } \left. \frac{d^2 m(h)}{dh^2} \right|_{h=h_0} > 0, \text{ то } \lambda_1 = +\chi, \lambda_2 = -\chi, \chi = \sqrt{\left. \frac{1}{m(h_0)} \frac{d^2 m(h)}{dh^2} \right|_{h=h_0}}.$$

В теории динамических систем показано [16 – 18], что искомая точка  $p_0, h_0$  является гиперболической или седловой.

В этом случае наблюдается экспоненциальный рост в одном направлении или экспоненциальное затухание в другом. К этому типу колебаний относятся точки неустойчивого равновесия. Таким образом, если вторая производная от профиля показателя преломления тропосферы является положительной, то в неподвижной точке на фазовой плоскости имеем неустойчивое равновесие фазовых траекторий.

$$2) \text{ Пусть теперь } \left. \frac{d^2 m(h)}{dh^2} \right|_{h=h_0} < 0. \text{ В этом случае собственные числа}$$

матрицы устойчивости являются мнимыми, т.е.

$$\lambda_1 = +j\chi, \quad \lambda_2 = -j\chi.$$

Это типичный случай эллиптической точки (или «центра»), вокруг которой вращается локальный фазовый поток. С точки зрения всей динамической структуры в целом (например, траектории в тропосферном волноводе) эллиптическая точка обеспечивает наличие орбитно-устойчивых траекторий [17].

Для иллюстрации приведенных выше выкладок оценим устойчивость траекторий радиоволн в тропосферном волноводе для некоторых модельных  $m(h)$ -профилей тропосферы, к которым могут приближаться реальные профили.

В качестве первого примера рассмотрим вертикальный профиль модифицированного индекса рефракции, который соответствует солитоноподобному высотному профилю показателя преломления

$$n(h) = 1 + \frac{\mu^2}{\cosh^2(h/a)},$$

где величина  $\mu$  – характеризует глубину соответствующей потенциальной ямы, а величина  $a$  – ее эффективную ширину. В этом случае

$$m(h) = \left( \frac{\mu^2}{\cosh^2(h/a)} + \frac{h}{a_{\text{зем}}} \right). \quad (3)$$

Найдем вторую производную от (3)

$$\frac{d^2 m(h)}{dh^2} = \left( 2 \frac{\mu^2 \sinh\left(\frac{h}{a}\right)}{\cosh^3\left(\frac{h}{a}\right) a^2} - \frac{\mu^2}{\cosh^4\left(\frac{h}{a}\right) a^2} \right)$$

или иначе

$$\frac{d^2 m(h)}{dh^2} = \frac{\mu^2}{a^2 \cosh^3\left(\frac{h}{a}\right)} \left[ \cosh^2\left(\frac{h}{a}\right) - 2 \right].$$

Первый множитель всегда положителен. Таким образом, исследование должно подвергаться второй множитель:

$$\cosh^2\left(\frac{h}{a}\right) - 2 = y(h).$$

Графики функций  $y(h)$  при различных значениях  $a$  приведены на рис. 1. Как следует из рис. 1, в зависимости от эффективной ширины потенциальной ямы (профиля показателя преломления) точка  $h_{\text{равн}}$  разделяет высоту  $h$  на две части. На высотах  $h > h_{\text{равн}}$  вблизи неподвижной точки

вторая производная  $\left. \frac{d^2 m(h)}{dh^2} \right|_{h=h_0}$  является положительной, и фазовые траектории становятся неустойчивыми. Следовательно, устойчивое существование траекторий тропосферного волновода возможно при  $h < h_{\text{равн}}$ . Высота  $h_{\text{равн}}$  зависит от профиля показателя преломления.

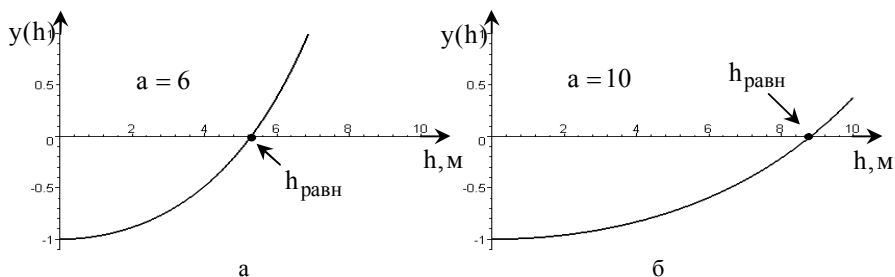


Рис. 1. Вид функций  $y(h)$  при различных значениях эффективной ширины потенциальной ямы  $a$

Следует заметить, что неподвижная точка, как было показано выше, находится из условия  $\frac{dm(h)}{dh} = 0$ .

В качестве второго примера рассмотрим гиперболический высотный профиль модифицированного индекса преломления, которым обычно аппроксимируют  $m(h)$ -профиль волновода испарения [6, 4]

$$m(h) = m(h_{\text{инв}}) + \frac{(h - h_{\text{инв}})^2}{h + a} \frac{1}{a_{\text{зем}}}, \quad (4)$$

где  $h_{\text{инв}}$  – высота инверсии (точки перегиба).

Найдем первую и вторую производную от (4)

$$\frac{dm(h)}{dh} = \frac{(h + h_{\text{инв}} + 2a)}{a_{\text{зем}}(h + a)^2} (h - h_{\text{инв}}); \quad (5)$$

$$\frac{d^2 m(h)}{dh^2} = \frac{2 \cdot (h_{\text{инв}} + a)^2}{a_{\text{зем}}} \frac{1}{(h + a)^3}. \quad (6)$$

Как видно из (5)

$$\frac{dm(h)}{dh} = 0 \text{ при } h = h_{\text{инв}}, \text{ следовательно } h_0 = h_{\text{инв}}.$$

Из (6) следует, что если  $h \geq 0$ , то  $\frac{d^2m(h)}{dh^2} > 0$ . Таким образом в вол-

новоде испарения нет устойчивых траектории радиоволн, а при  $h = h_{\text{инв}}$  существует точка неустойчивого равновесия.

При распространении радиоволн в волноводе испарения их траектории совершают колебания между подстилающей поверхностью моря (нижняя граница ТВВ) и точкой неустойчивого равновесия  $h_{\text{инв}}$  (верхняя граница ТВВ). Когда траектория радиоволны касается нижней стенки ТВВ, то часть электромагнитной энергии поглощается подстилающей поверхностью (морем). Если же после отражения от нижней границы ТВВ импульс достаточно велик и траектория переходит через точку  $h_{\text{инв}}$ , то такая радиоволна покидает волновод (происходит "высвечивание" электромагнитной энергии из ТВВ). Этим можно объяснить большое погонное затухание радиоволн в волноводе испарения и высокий уровень поля над ним на загоризонтной дальности [19].

**Методика оценки устойчивости траекторий радиоволн в морском тропосферном волноводе с использованием критерия Бендиксона.** Как видно из примера для волновода испарения использование только матрицы устойчивости в некоторых случаях не дает исчерпывающей информации о возможности или невозможности локации целей в ТВВ на загоризонтной дальности. Для принятия окончательного решения по этому поводу приходится привлекать дополнительные сведения об условиях распространения радиоволн. Поэтому рассмотрим другой, не менее известный критерий устойчивости динамических систем – критерий Бендиксона [17]. Для односвязной области  $G$  справедлив критерий Бендиксона [17]: если для аналитической системы (1) выражение

$$K_{\text{Бенд}}(p, h) = \frac{\partial S(p, h)}{\partial p} + \frac{\partial Q(p, h)}{\partial h} \quad (7)$$

Знакопостоянно в односвязной области  $G$ , то в области  $G$  не существует простых замкнутых кривых, состоящих из траекторий системы, то есть тропосферный волновод существовать не может. Для нахождения точек, при переходе через которые функция (7) меняет знак, необходимо решить уравнение

$$K_{\text{Бенд}}(p, h) = 0. \quad (8)$$

Относительно переменной  $h$ . Если уравнение (8) имеет несколько решений, то рассматривать необходимо только действительные из них. В зависимости от начального значения  $p$  функция  $K_{\text{Бенд}}(p, h)$  будет начинать-

ся в области положительных или отрицательных значений и менять свой знак на противоположный на интервале между  $i$ -м и  $i + 1$ -м корнем, причем  $i$  должно быть нечетное. При наличии отрицательных корней в качестве нижней границы высотных интервалов, где могут существовать устойчивые траектории, следует принимать уровень горизонта ( $h = 0$ ). Если среди решений уравнения (8) нет действительных положительных корней, то при таком  $m(h)$ -профиле устойчивых траекторий не существует.

Для иллюстрации использования критерия Бендиксона проведем расчеты для таких же профилей, для которых уже проводилась оценка устойчивости траекторий с использованием матрицы устойчивости. На рис. 2, а, б приведены графики, отражающие зависимость  $K_{\text{Бенд}}(h)$  при фиксированном  $p$ .

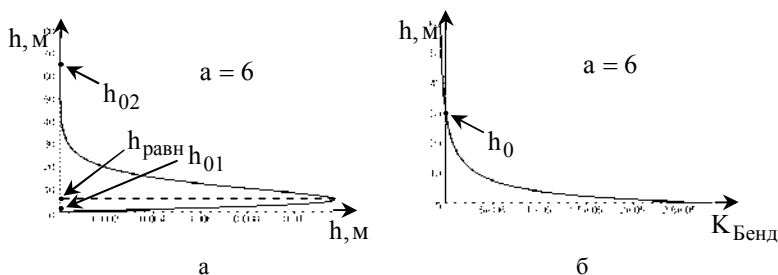


Рис. 2. Зависимость  $K_{\text{Бенд}}(h)$  для различных  $m(h)$ -профилей при  $p = 1$ :

- а) для  $m(h)$ -профиля заданного выражением (3);
- б) для  $m(h)$ -профиля, характерного для волновода испарения

Из рисунков видно, что функция  $K_{\text{Бенд}}(p, h)$  меняет знак при переходе через неподвижную точку  $h_0$ . При солитоноподобном  $n(h)$ -профиле уравнение  $K_{\text{Бенд}}(p, h) = 0$  имеет только два действительных корня, и оба они положительны. На рис. 2, а их значения обозначены соответственно как  $h_{01}$  и  $h_{02}$ . Поэтому существование устойчивых траекторий здесь возможно на интервале высот  $h \in [h_{01}, h_{02}]$ . В случае же  $m(h)$ -профиля, характерного для волновода испарения уравнение (8) имеет четыре корня, три из которых отрицательны. Поэтому существование устойчивых траекторий в ТВВ такого типа возможно на интервале высот  $h \in [0, h_0]$ .

Таким образом, для того чтобы оценить устойчивости траекторий радиоволн в морском тропосферном волноводе по критерию Бендиксона и найти интервалы высот, в пределах которых возможна локация целей на загоризонтной дальности, необходимо:

- 1) измерить значение коэффициента преломления тропосферы на интересующем высотном интервале и рассчитать  $m(h)$ -профиль;
- 2) найти действительные корни  $h_{0i}$  уравнения (8);
- 3) определить искомые высотные интервалы исходя из следующих условий:
  - если  $h \in [h_{0i}, h_{0i+1}]$ , где  $i$  – нечетное, то на этом интервале высот возможно существование устойчивых траекторий;
  - если среди действительных корней  $h_{0i}$  уравнения (8) есть как положительные, так и отрицательные, то в качестве нижней границы высотных интервалов, где могут существовать устойчивые траектории, следует принимать уровень горизонта ( $h = 0$ );
  - если среди решений уравнения (8) нет действительных положительных корней, то при таком  $m(h)$ -профиле устойчивых траекторий не существует.

**Выводы.** 1. Если известен вертикальный профиль модифицированного коэффициента преломления, то, найдя собственные значения матрицы устойчивости для луча в расширенном координатно-импульсном пространстве, можно определить интервалы высот, в пределах которых траектории радиоволн будут устойчивы. Таким образом, мы можем найти высоты, на которых возможно устойчивое обнаружение целей в морском ТВВ на загоризонтной дальности.

2. Число и размеры высотных интервалов, где существуют устойчивые траектории, определяются видом  $m(h)$ -профиля (количеством и эффективной шириной потенциальных ям).

3. Большое погонное затухание радиоволн в волноводе испарения и высокий уровень поля над ним на загоризонтной дальности можно объяснить отсутствием в ТВВ такого типа устойчивых траекторий.

4. В ряде случаев для оценки устойчивости траекторий удобнее пользоваться не матрицей устойчивости, а критерием Бендиксона. Соответствующая методика проведения расчетов приведена в тексте статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Распространение ультракоротких радиоволн: Пер. с англ. / Под ред. Б.А. Шиллерова. – М.: Сов. радио, 1954. – 564 с.*
2. *Распространение радиоволн в тропосфере: Обзор / Хитни Г.В., Рихтер Ю.Х., Папперт Р.А., Андерсон К.Д., Баумгартнер Дж.Б. // ТИИЭР. – 1985. – Т. 73. – № 2. – С. 106 – 128.*
3. *Сухонин Е.В. Оперативное прогнозирование рабочих характеристик мало-высотных РЛС на основе данных по коэффициентам преломления атмосферы // Радиотехника сверхвысоких частот, ЭИ. – 1990. – № 44. – С. 1 – 5.*



4. Михайлов Н.Ф., Рыжков А.В., Шукин Г.Г. Радиометеорологические исследования над морем. – Л.: Гидрометеоиздат, 1990. – 207 с.
5. Морская радиолокация / Под ред. В.И. Винокурова. – Л.: Судостроение, 1986. – 256 с.
6. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970. – 520 с.
7. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980.
8. Булдырев В.С., Грикуров В.Э., Саликов С.П. Горизонты прямой видимости и границы применимости метода нормальных волн при сверхрефракции // Радиотехника и электроника. – 1979. – № 7. – С. 1323 – 1331.
9. Грикуров В.Э., Саликов С.П. Численное сравнение лучевого метода и метода нормальных волн для тропосферного волновода // Радиотехника и электроника. – 1978. – № 8. – С. 1578 – 11587.
10. Голанд В.И., Кошель К.В. Метод эволюции спектрального параметра в задаче о загоризонтном распространении ультракоротких волн // Радиотехника и электроника. – 1990. – № 9. – С. 1805 – 1809.
11. Кукушкин А.В., Фрейлихер В.Д., Фукс И.М. Рассеяние дифракционного поля на турбулентных пульсациях показателя преломления тропосферы // Изв. вузов. Радиофизика. – 1983. – № 7. – С. 817 – 822.
12. Кляцкин В.И. Метод погружения в теории распространения волн. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
13. Kane S. Y., Jai S. C. Impedance Boundary Condition Simulation in the FDTD/FVTD Hybrid // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1997. – Vol. 45, № 6. – P. 921 – 925.
14. Кравцов Ю.А., Свистунов К.В., Тинин М.В. Об использовании представлений лучевых траекторий в расширенном пространстве параметров при решении задач распространения волн в неоднородных средах // Радиотехника и электроника. – 1990. – № 8. – С. 1603 – 1609.
15. Карлов В.Д., Полярус О.В., Савченко М.П., Цехмістров Є.В. Обґрунтування вибору методу розрахунку морського радіолокаційного тропосферного хвильоводу // Збірник наукових праць ХВУ. – X: ХВУ. – 2001. – Вип. № 7 (37). – С. 37 – 40.
16. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
17. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
18. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
19. Кукушкин А.В., Синицын В.Г., Влияние приводной М-инверсии на распространение радиоволн в тропосферном волноводе // Изв. вузов. Радиофизика. – 1979. – Т. 22, № 7. – С. 802 – 808.

Поступила 29.03.2005

**Рецензент:** доктор технических наук, профессор В.И. Карпенко,  
Харьковский университет Воздушных Сил.