

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА С КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.И. Тыртышников, Н.Б. Никулин, Е.Б. Одарушенко
(Полтавский военный институт связи)

Предложен алгоритм расчета амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) цифровых фильтров произвольного порядка, реализованных в канонической форме, по заданным комплексным либо действительным весовым коэффициентам, не использующий операции над комплексными числами.

амплитудно-частотные характеристики, цифровой фильтр

Введение. В задачах проектирования цифровых фильтров часто желательным является получение АЧХ в табличном или графическом виде – например, с целью анализа тенденции ее изменения при моделировании адаптивного фильтра. В случае, когда фильтр имеет высокий порядок и комплексные весовые коэффициенты, многократный расчет АЧХ является сложной задачей, требующей больших вычислительных и временных затрат даже при использовании языков программирования, имеющих стандартные подпрограммы вычисления модуля комплексного числа. При этом главным источником названных затрат является именно многократное выполнение операций над комплексными числами.

В известной авторам литературе описания вычислительных алгоритмов решения данной задачи, свободных от указанного недостатка, не обнаружены.

Целью данной работы является получение расчетных выражений, не содержащих операций с комплексными числами, и в совокупности образующих универсальный алгоритм расчета АЧХ цифровых фильтров произвольного порядка (как с комплексными, так и с действительными весовыми коэффициентами), реализованных в канонической форме.

Передаточная функция цифрового фильтра, имеющего N прямых и M обратных связей, может быть представлена в виде:

$$H(Z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n Z^{-n}}{1 - \sum_{m=1}^M b_m Z^{-m}} = Z^{N-M} \cdot \frac{\sum_{n=0}^N a_n Z^{N-n}}{- \sum_{m=0}^M b_m Z^{M-m}},$$

где a_n и b_m – весовые коэффициенты прямых и обратных связей цифрового фильтра соответственно, а $b_0 = -1$.

$$\text{Обозначим } X(Z) = \sum_{n=0}^N a_n Z^{N-n}; \quad Y(Z) = - \sum_{m=0}^M b_m Z^{M-m}.$$

Тогда АЧХ фильтра можно представить в виде

$$|H(Z)| = |Z^{N-M}| |X(Z)| / |Y(Z)|.$$

С учетом того, что $|Z^{N-M}| = 1$,

$$|H(Z)| = \sqrt{\frac{\text{Re}^2 X(Z) + \text{Im}^2 X(Z)}{\text{Re}^2 Y(Z) + \text{Im}^2 Y(Z)}} = \sqrt{\frac{K_x^2(wT)}{K_y^2(wT)}}, \quad (1)$$

где w – циклическая частота; T – интервал дискретизации; $K_x(wT)$ и $K_y(wT)$ – АЧХ нерекурсивной и рекурсивной частей цифрового фильтра соответственно; символами Re и Im обозначены действительные и мнимые части соответствующих комплексных величин.

Для получения $\text{Re}^2 X(Z)$, $\text{Im}^2 X(Z)$, $\text{Re}^2 Y(Z)$, $\text{Im}^2 Y(Z)$ воспользуемся общеизвестным алгоритмом сокращенного умножения

$$(x + y + z + \dots + t + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \dots + 2xy + 2xz + \dots + 2xu + 2yz + \dots + 2yu + \dots + 2tu,$$

или, переходя к индексным обозначениям переменных

$$\left(\sum_{n=0}^M x_n\right)^2 = \sum_{n=0}^M x_n^2 + 2\left(\sum_{n=1}^M x_0 x_n + \sum_{n=2}^M x_1 x_n + \dots + \sum_{n=M}^M x_{M-1} x_n\right).$$

Производя перегруппировку членов, получаем

$$\left(\sum_{n=0}^M x_n\right)^2 = x_0^2 + \sum_{n=1}^M (x_n^2 + 2 \sum_{k=0}^{M-n} x_{k+n} x_k). \quad (2)$$

Для случая, когда весовые коэффициенты фильтра комплексные

$$X(Z) = \sum_{n=0}^N \dot{a}_n Z^{N-n} = \sum_{n=0}^N [a_n \cos(N-n)wT - e_n \sin(N-n)wT + j(a_n \sin(N-n)wT + e_n \cos(N-n)wT)],$$

где $a_n = \text{Re} \dot{a}_n$, $e_n = \text{Im} \dot{a}_n$.

Соответственно:

$$\text{Re} X(Z) = \sum_{n=0}^N [a_n \cos(N-n)wT - e_n \sin(N-n)wT]; \quad (3)$$

$$\text{Im}X(Z) = \sum_{n=0}^N [(a_n \sin(N-n)\omega T + e_n \cos(N-n)\omega T)]. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (2) и выполняя несложные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} \text{Re}^2 X(Z) &= (a_0 \cos N\omega T - e_0 \sin N\omega T)^2 + \sum_{n=0}^N [(a_n \cos(N-n)\omega T - \\ &- e_n \sin(N-n)\omega T)^2 + 2 \sum_{k=0}^{N-n} ((a_k \cos(N-k)\omega T - e_k \sin(N-k)\omega T) \times \\ &\times (a_{k+n} \cos(N-k-n)\omega T - e_{k+n} \sin(N-k-n)\omega T)] = \dots \\ &= a_0^2 \cos^2 N\omega T + e_0^2 \sin^2 N\omega T - a_0 e_0 \sin 2N\omega T + \\ &+ \sum_{n=1}^N [a_n^2 \cos^2(N-n)\omega T + e_n^2 \sin^2(N-n)\omega T - a_n e_n \sin 2(N-n)\omega T + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-n} ((a_k a_{k+n} + e_k e_{k+n}) \cos n\omega T + (a_k e_{k+n} - e_k a_{k+n}) \sin n\omega T + \\ &+ (a_k a_{k+n} - e_k e_{k+n}) \cos(2(N-k)-n)\omega T - (a_k e_{k+n} + e_k a_{k+n}) \sin(2(N-k)-n)\omega T)]. \end{aligned}$$

Подставляя (4) в (2) аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \text{Im}^2 X(Z) &= a_0^2 \sin^2 N\omega T + e_0^2 \cos^2 N\omega T + a_0 e_0 \sin 2N\omega T + \\ &+ \sum_{n=1}^N [a_n^2 \sin^2(N-n)\omega T + e_n^2 \cos^2(N-n)\omega T + a_n e_n \sin 2(N-n)\omega T + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-n} ((a_k a_{k+n} + e_k e_{k+n}) \cos n\omega T + (a_k e_{k+n} - e_k a_{k+n}) \sin n\omega T - \\ &- (a_k a_{k+n} - e_k e_{k+n}) \cos(2(N-k)-n)\omega T - \\ &- (a_k e_{k+n} + e_k a_{k+n}) \sin(2(N-k)-n)\omega T)]. \end{aligned}$$

Суммируя два последних выражения, получаем

$$\begin{aligned} K_x^2(\omega T) &= \text{Re}^2 X(Z) + \text{Im}^2 X(Z) = a_0^2 + e_0^2 + \sum_{n=1}^N [a_n^2 + e_n^2 + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{N-n} ((a_k a_{k+n} + e_k e_{k+n}) \cos n\omega T + (a_k e_{k+n} - e_k a_{k+n}) \sin n\omega T)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Соответственно, выражение для $K_y^2(wT)$ имеет вид

$$K_y^2(wT) = \operatorname{Re}^2 Y(Z) + \operatorname{Im}^2 Y(Z) = 1 + \sum_{m=1}^M [c_m^2 + d_m^2 + 2 \sum_{k=0}^{M-m} ((c_k c_{k+m} + d_k d_{k+m}) \cos mwT + (c_k d_{k+m} - d_k c_{k+m}) \sin mwT)], \quad (6)$$

где $c_m = \operatorname{Re} \dot{b}_m$; $d_m = \operatorname{Im} \dot{b}_m$; $c_0 = -1$; $d_0 = 0$.

Окончательно АЧХ фильтра рассчитываем, подставляя (5) и (6) в (1).

Для частного случая, когда весовые коэффициенты цифрового фильтра действительные, (5) и (6) сводятся к известным выражениям:

$$K_x^2(wT) = a_0^2 + \sum_{n=1}^N [a_n^2 + 2 \cos nwT \sum_{k=0}^{N-n} a_k a_{k+n}];$$

$$K_y^2(wT) = 1 + \sum_{m=1}^M [b_m^2 + 2 \cos mwT \sum_{k=0}^{M-m} b_k b_{k+m}].$$

Вывод. Главным преимуществом полученного алгоритма является то, что он не включает в себя операций с комплексными числами, за счет чего и достигается существенное уменьшение – в сравнении с традиционными алгоритмами – времени его выполнения. Следует отметить, что выигрыш во времени выполнения увеличивается с возрастанием порядка цифрового фильтра, АЧХ которого рассчитывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. *Цифровая обработка сигналов: процессы, алгоритмы, средства проектирования.* – 2-е изд. – С.-Пб.: Политехника, 1999. – 592 с.
2. Виноградов Н.А., Яковлев В.Н. и др. *Справочник по устройствам цифровой обработки информации.* – К.: Техника, 1988. – 415 с.
3. Бондарев В.Н., Трёстер Г., Чернега В.С. *Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. пособие для вузов.* – Севастополь: СевГТУ, 1999. – 398 с.

Поступила 5.03.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Н.В. Галай,
Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка.