

УДК 621.301

Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ФЕРОРЕЗОНАНСНИХ СИСТЕМ.

Розглядається спосіб дослідження нелінійних консервативних та дисипативних ферорезонансних систем, заснований на використанні їх особливих точок, що визначають стан рівноваги. Для визначення стійкості пропонується отримувати рівняння фазових траєкторій, які встановлюють взаємозв'язок між швидкістю зміни потокозчеплення та потокозчепленням.

**Ключові слова:** котушка з феромагнітним осердям, ферорезонанс, особливі точки, фазові траєкторії.

### Вступ

**Постановка проблеми.** При дослідженні нелінійних систем доцільно провести аналіз положення їх особливих точок. Особливі точки визначають стан рівноваги нелінійної системи. Якщо положення й тип особливих точок знайдені, то можливо побудувати фазові траєкторії, які встановлюють зв'язок між швидкістю зміни того чи іншого параметра та власне цим параметром. Електричні кола, в яких можливе виникнення явища ферорезонансу струмів або явища ферорезонансу напруг та в яких котушки з феромагнітним осердям  $L_K$  та ємність  $C$  увімкнені паралельно або послідовно, можливо представити, як нелінійні системи, струм в котушці  $L_K$  представляється скороченим поліномом третього ступеня  $i = a_1\psi + a_2\psi^3$ , а напруга, яка прикладена до котушки  $U_K = \frac{d\psi_K}{dt}$ , де  $\psi$  - потокозчеплення котушки з феромагнітним осердям.

Встановлення зв'язку між потокозчепленням та швидкістю зміни цього параметру й визначення типу особливих точок для різних варіантів схем вмикання котушки з феромагнітним осердям  $L_K$ , конденсатора  $C$  та активного опору  $R$  дозволяє визначити стан рівноваги розглядаємої нелінійної системи.

**Аналіз літератури.** Явище ферорезонансу в електричних колах розглянуто в [1 – 3]. В цих роботах отримані нелінійні неоднорідні диференціальні рівняння, які встановлюють зв'язок між потокозчепленням та струмом або напругою. Для побудови фазових траєкторій достатньо розглянути лише ліву частину цих диференціальних рівнянь, тобто розглянути нелінійні однорідні диференціальні рівняння. Так, для варіанта послідовного або паралельного вмикання котушки  $L_K$  та конденсатора  $C$  слід розглянути наступне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + A_1\psi + A_2\psi^3 = 0. \quad (1)$$

Для варіанта паралельного вмикання котушки  $L_K$ , конденсатора  $C$  та активного опору  $R$  слід розглянути таке диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + A_0 \frac{d\psi}{dt} + A_1\psi + A_2\psi^3 = 0. \quad (2)$$

Для варіанта послідовного з'єднання котушки  $L_K$ , конденсатора  $C$  та активного опору  $R$  нелінійне однорідне диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (b_1 + b_2\psi^2) \frac{d\psi}{dt} + A_1\psi + A_2\psi^3 = 0. \quad (3)$$

Такий же вигляд має нелінійне однорідне диференціальне рівняння для кола, в якому до котушки  $L_K$ , послідовно з'єднаної з активним опором  $R$ , паралельно приєднаний конденсатор  $C$ , та нелінійне однорідне диференціальне рівняння кола, в якому до послідовного з'єднання конденсатора  $C$  й активного опору  $R$  паралельно увімкнена котушка  $L_K$ . В роботах [1 – 3] отримані закономірності зміни потокозчеплення під дією першої та третьої гармонійних складових струму та напруги, тобто знайдені вимушені складові зміни потокозчеплень. Але в цих роботах власні складові зміни потокозчеплень не розглядалися.

### Основний матеріал

Перш за все розглянемо рух нелінійної консервативної коливальної системи, яка описується диференціальним рівнянням (1). Для цього введемо позначення приведенного часу  $\tau = \sqrt{A_1} \cdot t$ , та приведенного коефіцієнта  $\alpha = A_2 / A_1$ . З урахуванням цих позначень рівняння (1) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \psi + \alpha\psi^3 = 0 \quad (4)$$

або у вигляді

$$\frac{d}{d\tau} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{dV_\psi}{d\tau} \frac{d\psi}{d\tau} = V_\psi \frac{dV_\psi}{d\psi} = -(\psi + \alpha\psi^3), \quad (5)$$

де  $V_\psi = \frac{d\psi}{d\tau}$  - швидкість зміни потокозчеплення.

З рівняння (5) отримаємо рівняння для визначення похідної:

$$\frac{dV_\psi}{d\psi} = -\frac{\psi + \alpha\psi^3}{V_\psi}. \quad (6)$$

З (6) маємо, що існують три особливі точки, для яких  $\frac{dV_\psi}{d\psi} = 0$ , тобто наступні точки  $\psi_{S1} = 0$ ,

$\psi_{S2} = -\psi_{S3} = \sqrt{A_1/A_2}$ , в початку координат розміщений центр, а при  $\psi = \pm(A_1/A_2)^{1/2}$  – седла.

З (6) слідує, що

$$V_\psi^2 = -\frac{\alpha\psi^4}{2} - \psi^2 + C, \quad (7)$$

де  $C$  – постійна (визначається початковими умовами).

Співвідношення (7) має реальний фізичний зміст тоді, коли коефіцієнт  $A_2 < 0$ . З (7), не враховуючи тривіального випадку, коли  $\psi = 0$ , отримаємо, так зване, рівняння сепаратриси

$$V_\psi^2 + 1 = -\frac{\alpha}{2}\psi^2 + C, \quad (8)$$

з якого слідує, що  $-(A_2/A_1)\psi^2 \geq 1$  у випадку, коли постійна  $C = 0$ .

Сепаратриса з'єднує зовнішні особливі точки та розмежує фазову площину на зони якісно розрізняємих рішень, визначаємих значеннями потокозчеплення,

для яких  $\frac{dV_\psi}{d\psi} = 0$ . Якщо це значення відповідає

локальному мінімуму потенціальної енергії, тобто особливість центр, то маємо нейтрально стійке положення рівноваги. Якщо ця точка відповідає локальному максимуму потенціальної енергії, тобто особливість седло, то маємо нестійке положення рівноваги.

Фазові траєкторії біля початку координат замкнені, що свідчить про те, що перехідний процес має коливальний характер. По мірі віддалення від центру тоді, коли  $\psi > \left| \sqrt{A_1/A_2} \right|$ , фазові траєкторії перестають бути замкненими, а перехідний процес втрачає коливальний характер.

Пошук особливих точок при розгляданні перехідних процесів в нелінійних дисипативних системах, диференціальні рівняння яких мають вигляд (2) або (3) ускладнюється. Відповідні вирази для визначення похідних  $\frac{dV_\psi}{d\psi}$  мають вигляд для рівняння (2)

$$\frac{dV_\psi}{d\psi} = -\frac{\psi + \alpha\psi^3}{V_\psi} - \beta \quad (9)$$

$$\text{та для (3)} \quad \frac{dV_\psi}{d\psi} = -\frac{\psi + \alpha\psi^3}{V_\psi} - \gamma - \lambda\psi^3, \quad (10)$$

де  $\beta = A_0/A_1$ ;  $\gamma = b_1/A_1$ ;  $\lambda = b_2/A_1$ .

Пошук особливих точок для (9) та (10) потребує встановлення залежності  $V_\psi = f(\psi)$ , тобто вимагає попереднього рішення диференціальних рівнянь (2) та (3) хоча б шляхом чисельного інтегрування.

## Висновки

1. Консервативні нелінійні системи, в яких можуть мати місце ферорезонансні явища, доцільно досліджувати шляхом визначення особливих точок та побудови фазових траєкторій, які встановлюють характер залежності швидкості зміни потокозчеплення в перехідному процесі від власне потокозчеплення.

2. Для дослідження стійкості дисипативних нелінійних систем, в яких можуть мати місце ферорезонансні явища, у першому наближенні доцільно не враховувати втрати енергії, що мають місце на активному опорі системи, а в подальшому для уточнення отриманих рішень встановлювати закономірності зміни потокозчеплення в перехідному процесі.

## Список літератури

1. Кононов, Б.Т. Феррорезонанс в электрических сетях с поперечной и продольной компенсацией потерь напряжения / Б.Т. Кононов, Е.А. Кононова, А.А. Мушаров // *Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил*. – 2012. – Вип. 1(30). – С. 144 – 146.

2. Кононов, Б.Т. Феррорезонанс в электрических цепях с различными схемами соединения активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником / Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров // *Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил*. – 2012. – Вип. 2 (31). – С. 110 – 114.

3. Кононов Б.Т. Феррорезонанс напруг в дисипативній системі / Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров // *Системи озброєння і військова техніка*. – № 4 (32). – С.118 – 120.

Надійшла до редколегії 12.03.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук проф. В.М. Чинков, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров

*Рассматривается способ исследования нелинейных консервативных и диссипативных феррорезонансных систем, основанный на использовании их особых точек, которые определяют состояние равновесия. Для определения устойчивости предлагается получить уравнения фазовых траекторий, которые устанавливают зависимость между скоростью изменения потокозчепления и потокозчеплением.*

**Ключевые слова:** катушка с ферромагнитным сердечником, феррорезонанс, особые точки, фазовые траектории.

## INVESTIGATION OF FERRORESONANCE SYSTEM STABILITY

В.Т. Kononov, А.А. Musharov

*The way the study of nonlinear conservative and dissipative systems, ferroresonance, based on the use of special points, which determine the state of equilibrium. To determine the stability of the proposed equations to obtain the phase trajectories, which establish the relationship between the rate of change of flux and flux linkage.*

**Keywords:** the coil with ferromagnetic core, ferroresonance, special points, the phase trajectories.