

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЯ КОДОВ ФАЗЫ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ЧМ СИГНАЛОВ

Н.П. Кандырин,<sup>1</sup> А.М. Дзигора<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков,  
<sup>2</sup>Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба)

*Рассмотрены особенности построения полиномиальных цифровых вычислителей кодов фазы (ВКФ) простых и сложных сигналов. Получены математические модели ВКФ, применяемых в цифровых синтезаторах сигналов (ЦСС) и для формирования модулирующего напряжения в фазовых модуляторах.*

***полиномиальный цифровой вычислитель кодов фазы, цифровой синтезатор сигналов, математическая модель***

**Постановка проблемы.** В настоящее время функции синтеза простых и сложных сигналов при модернизации существующих и разработке перспективных образцов радиоэлектронного вооружения возложены, в основном, на цифровые синтезаторы сигналов.

Наиболее перспективными для формирования радиолокационных сигналов с гибким изменением в широких пределах частотно-временных параметров, являются ЦСС вычислительного типа. Основным элементом таких ЦСС является цифровой вычислитель кодов фазы [1 – 5]. При формировании любого вида ЧМ сигнала в ВКФ вычисляется его последовательность кодов фазы, значения которых в дискретные моменты времени определяются номером такта работы устройства. Емкость ВКФ напрямую зависит от требуемой точности установки начальных параметров, их шага перестройки и качества выходных сигналов [2, 4, 5].

Поэтому анализ точности вычисления кодов фазы, особенно на этапе проектирования, с помощью математической модели, которая воспроизводит наиболее важные черты оригинала, является актуальной научно-технической задачей при синтезе как простых, так и сложных ЧМ сигналов.

**Анализ литературы.** При цифровом формировании сложных радиолокационных сигналов требуемый закон ЧМ или ФМ задается, как правило, в виде степенного многочлена

$$f(t) = \sum_{s=0}^{m-1} B_s t^s ; \quad \varphi(t) = \sum_{s=0}^m C_s t^s . \quad (1)$$

Вычисление значений  $\varphi(t_r)$  в дискретные моменты времени  $t_r = rT$  можно реализовать алгоритмически на базе универсальных ЭВМ или

микропроцессоров. Однако с точки зрения унификации, миниатюризации, экономичности, быстродействия и надежности, во многих случаях более эффективны специализированные вычислители. К таким устройствам относятся и цифровые синтезаторы сигналов, построенные на основе вычислителей кодов фазы. ВКФ представляет собой полиномиальный функциональный преобразователь информации (ФПИ), воспроизводящий в процессе работы полином [6]

$$K_{\varphi}(r) = \sum_{s=0}^m A_s r^s, \quad (2)$$

для вычисления которого обычно используют схему Горнера [6] (рис. 1).

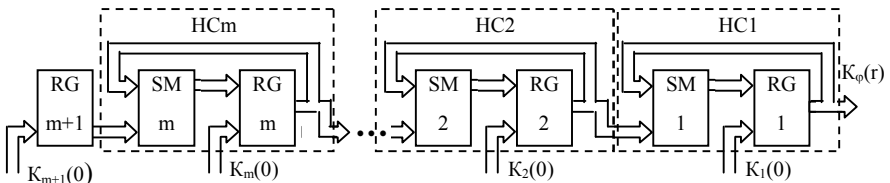


Рис. 1. Структурная схема полиномиального ВКФ (схема Горнера)

Многочлен (2) получается из (1) путем замены переменной  $t_r = rT$  с учетом того, что емкость ВКФ эквивалентна  $2\pi$ , а коды представляют собой целые числа. Связь между коэффициентами  $A_s$  и  $C_s$  определяется выражением

$$A_s = \frac{C_s T^s N}{2\pi} = \frac{C_s T^s 2^n}{2\pi}, \quad (3)$$

где  $T$  – период дискретизации;  $N$  и  $n$  – емкость и число разрядов ВКФ.

При цифровом синтезе сигналов, когда независимой переменной является время  $t_r = rT$ , в качестве линейных блоков используются цифровые интеграторы, которые после введения начальных кодов воспроизводят полином (2). В качестве интеграторов в цифровой технике используются накапливающие сумматоры (НС), в которые независимая переменная вводится в виде последовательности тактовых импульсов  $r = 1, 2, 3, \dots$

Однако в полиномиальных ЦСС необходимо учитывать, что при подаче кода  $K_j$  на  $j$ -й НС, соответствующий код фазы на выходе НС1 (рис.1) запаздывает на время  $\tau = jT$ . Наличие запаздывания не сказывается на законе ЧМ при синтезе сигналов  $U(t) = U_0 \sin(C_s t^S)$ , когда все коэффициенты полинома, за исключением одного, равны нулю. В противном случае на выходе устройства формируется колебание

$$U(t) = U_0 \sin \left( \sum_{s=0}^m C_s (t - sT)^s \right), \quad (4)$$

закон ЧМ которого не совпадает с заданным.

Указанный недостаток устраняется двумя способами. В первом случае все НС начинают работать одновременно (рис. 2).

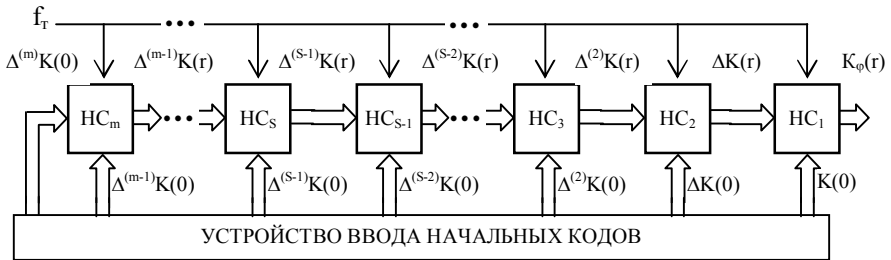


Рис. 2. Структурная схема ВКФ с одновременной синхронизацией НС

Во втором случае (рис. 3) начало работы каждого НС смещается относительно друг друга, и на выходе НС<sub>1</sub> формируется код фазы, в точности равный требуемому, но задержанный на время  $t = (m + 1)T$ .

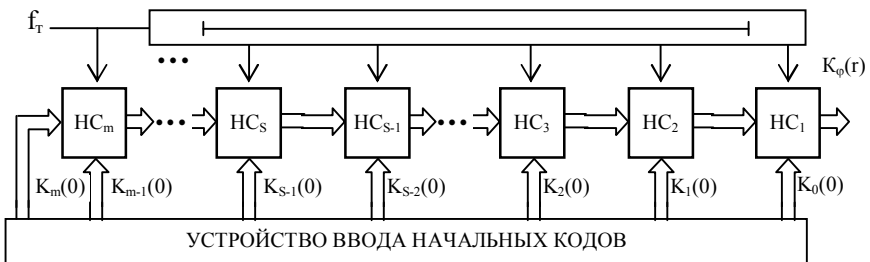


Рис. 3. Структурная схема ВКФ с задержкой синхронизации НС

Процессы вычисления кодов фазы сигналов в ВКФ, в первом и втором случаях частично были рассмотрены в [1, 2, 4], однако для создания их математической модели этого было явно недостаточно.

**Целью статьи** является разработка математической модели ВКФ, как одного из составных узлов унифицированного синтезатора простых и сложных ЧМ сигналов и формирователя модулирующего напряжения в фазовых модуляторах, для их моделирования на этапе проектирования и разработки.

**Основной раздел.** Прежде чем найти выражение, описывающее математическую модель ВКФ, для простоты рассуждений, проанализируем его работу по схеме, приведенной на рис. 2.

В регистры накапливающих сумматоров перед началом работы ЦСС вводятся соответствующие начальные коды:  $K_\phi(0)$ ,  $\Delta K_\phi(0)$ ,  $\Delta^{(2)}K_\phi(0)$ , ...,  $\Delta^{(s)}K_\phi(0)$ , ...,  $\Delta^{(m)}K_\phi(0)$ , где  $\Delta^{(s)}K_\phi(0)$  – разность порядка  $s$ , равная

$$\Delta^{(s)}K_\phi(r) = \Delta^{(s-1)}K_\phi(r+1) - \Delta^{(s-1)}K_\phi(r). \quad (5)$$

С приходом первого тактового импульса ( $r = 1$ ) содержимое каждого предыдущего НС <sub>$s$</sub>  суммируется с содержимым последующего НС <sub>$s-1$</sub> , в

регистр которого при этом записывается код – результат сложения

$$\Delta^{(s-2)}K_{\varphi}(1) = \Delta^{(s-2)}K_{\varphi}(0) - \Delta^{(s-1)}K_{\varphi}(0), \quad (6)$$

а содержимое  $HC_m$  увеличивается на величину

$$\Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(1) = \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(0) - \Delta^{(m)}K_{\varphi}(0). \quad (7)$$

В регистре последнего  $HC_1$  образуется код фазы  $K_{\varphi}(1)$ , равный

$$K_{\varphi}(1) = K_{\varphi}(0) + \Delta K_{\varphi}(0). \quad (8)$$

В результате поступления на ВКФ  $r$  тактовых импульсов, в регистрах  $HC$  установятся коды соответствующих чисел:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(r) = \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(0) + r\Delta^{(m)}K_{\varphi}(0); \\ \dots \\ \Delta^{(s)}K_{\varphi}(r) = \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + \sum_{j=s+1}^m \left[ \frac{\Delta^{(j)}K_{\varphi}(0)}{(j-s)!} \prod_{i=0}^{j-s-1} (r-i) \right]; \\ \dots \\ K_{\varphi}(r) = K_{\varphi}(0) + \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\Delta^{(j)}K_{\varphi}(0)}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} (r-i) \right]. \end{array} \right. \quad (9)$$

Очевидно, что для точного воспроизведения полинома (2) с заданными коэффициентами  $A_s$ , необходимо установить функциональную зависимость между ними и начальными значениями  $K_{\varphi}(0)$ ,  $\Delta K_{\varphi}(0)$ ,  $\Delta^{(2)}K_{\varphi}(0), \dots, \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0), \Delta^{(m)}K_{\varphi}(0)$ , где  $s = 1, 2, \dots, m$ .

Воспользовавшись выражением, определяющим разность порядка  $s$  через значения ординат решетчатой функции  $K_{\varphi}(r)$ , получаем [6]

$$\Delta^{(s)}K_{\varphi}(r) = \sum_{k=0}^s (-1)^k \cdot K_{\varphi}(r+s-k). \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение для  $K_{\varphi}(r)$  и считая  $r = 0$ , получаем

$$\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) = \sum_{k=0}^s (-1)^k \cdot C_s^k \cdot \sum_{i=1}^m A_i (s-k)^i, \quad (11)$$

где  $C_s^k = s! / (k!(s-k)!)$  – число сочетаний из  $s$  элементов по  $k$ .

Очевидно, что  $K_{\varphi}(0) = A_0$ ,  $\Delta^{(0)}K_{\varphi}(0) = A_m m!$ , а разности  $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$  определяются зависимостью (11). Так, например, для полинома пятой степени  $K_{\varphi}(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4 + A_5 r^5$  имеем:

$$\begin{aligned} \Delta^{(5)}K_{\varphi}(0) &= 120A_5; \quad \Delta^{(4)}K_{\varphi}(0) = 24A_4 + 240A_5; \\ \Delta^{(3)}K_{\varphi}(0) &= 6A_3 + 36A_4 + 150A_5; \quad \Delta^{(2)}K_{\varphi}(0) = 2A_2 + 6A_3 + 14A_4 + 30A_5; \\ \Delta K_{\varphi}(0) &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5; \quad K_{\varphi}(0) = A_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Начальные условия, получаемые из (12), вводятся в ВКФ округленными до целых чисел, что обуславливает погрешность округления, зависящую от разрядности регистров НС. Вследствие округления, каждый из начальных кодов будет выражаться с ошибкой, и вместо значений  $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$  и  $K_s(0)$  в интеграторы вводятся числа

$$K_s^*(0) = \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + \delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)] = \text{ent}\{\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + 0,5\}, \quad (13)$$

где  $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$  и  $K_s(0)$  – требуемые значения начальных кодов;  $\delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)]$  и  $\delta[K_s(0)]$  – погрешности округления;  $\text{ent}\{\}$  – оператор выделения целой части числа.

По абсолютной величине погрешности  $\delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)]$  и  $\delta[K_s(0)]$ , очевидно, не должны превышать половины единицы младшего разряда НС, т.е.

$$\delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)] \leq (2^{n+1})^{-1}; \quad \delta K_s(0) \leq (2^{n+1})^{-1}$$

Так как НС имеют ограниченную разрядность, то на выходе ВКФ формируется последовательность кодов фазы по модулю  $N = 2^n$ .

Таким образом, математическая модель ВКФ, представленного на рис. 2, будет иметь следующий вид

$$K_{\varphi}(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[ \frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r-i) \right] - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left( K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[ \frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r-i) \right] \right) \right\}, \quad (14)$$

где начальные коды  $K_s^*(0)$ , предварительно записываемые в регистры НС, рассчитываются согласно (13). Вычитание в (14) реализуется автоматически при переполнении ВКФ, емкость которого эквивалентна  $2\pi$  радиан.

Рассуждая аналогичным образом, получаем математическую модель ВКФ, представленного на рис. 3:

$$K_{\varphi}(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[ \frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r+i) \right] - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left( K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[ \frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r+i) \right] \right) \right\}, \quad (15)$$

где начальные коды  $K_s^*(0)$  рассчитываются согласно выражения

$$K_s^*(0) = K_s(0) + \delta[K_s(0)] = \text{ent}\{K_s(0) + 0,5\}.$$

Например, при цифровом формировании ЛЧМ сигнала закон изменения его фазы описывается полиномом второй степени ( $m = 2$ )

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2\pi f_{\text{н}} t + \pi \beta t^2,$$

а минимальный по аппаратным затратам ВКФ содержит два НС и в процессе работы воспроизводит последовательность кодов фазы (рис. 4)

$$K_{\varphi}(r) = K_{\varphi_0} + rK_{f_{\text{н}}} + \frac{r(r-1)}{2} K_{\beta} - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left[ K_{\varphi_0} + rK_{f_{\text{н}}} + \frac{r(r-1)}{2} K_{\beta} \right] \right\},$$

где  $K_{\varphi_0}$ ,  $K_{f_H}$  и  $K_{\beta}$  – соответственно, код начальной фазы, частоты и скорости ЧМ, определяемые соотношениями:

$$K_{\varphi_0} = \text{ent} \left\{ \frac{\varphi_0 N}{2\pi} + 0,5 \right\}; \quad K_{f_H} = \text{ent} \left\{ \frac{f_H N}{f_T} + \frac{\beta N}{2f_T^2} + 0,5 \right\}; \quad K_{\beta} = \text{ent} \left\{ \frac{\beta N}{f_T^2} + 0,5 \right\}.$$

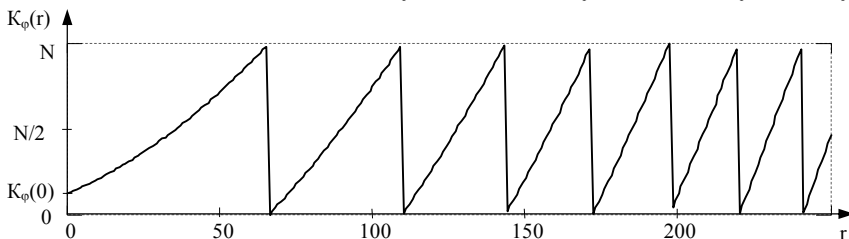


Рис. 4. Диаграмма работы ВКФ при  $m=2$

Таким образом, полиномиальную последовательность кодов фазы любого сигнала можно воспроизвести цепочкой цифровых накопителей.

**Выводы.** Полученные математические модели ВКФ однозначно связаны с начальными параметрами формируемых ЧМ сигналов и позволяют моделировать процессы формирования в них кодов фазы сигналов любой сложности. При этом учитываются и ошибки округления начальных кодов, обусловленные ограниченной разрядностью накапливающих сумматоров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кочемасов В.Н., Белов Л.А., Окочешников В.С. Формирование сигналов с линейной частотной модуляцией. – М.: Радио и связь, 1983. – 192 с.
2. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. Методика определения параметров цифровых синтезаторов по величине искажений сжатых ЛЧМ сигналов в РЛС различного назначения // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 4 (20). – С. 219-224.
3. А.С. 1578799 (СССР). Цифровой синтезатор частот / Н.П. Кандырин, Ю.М. Романов, С.А. Соколов. – Опубл. в Б.И., 1990, № 26.
4. Зайцев А.Л. Цифровые синтезаторы сигналов с частотной модуляцией и их применение при радиофизических исследованиях планет. – Дисс. канд. техн. наук. – М.: ИРЭ АН СССР. – 1980. – 231 с.
5. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. К вопросу о расширении частотного диапазона формируемых сигналов в цифровых синтезаторах // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, НАНУ, ПАНМ. – 2002. – Вып. 5 (21). – С. 88-92.
6. Смолов В.Б. Функциональные преобразователи информации. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. – 248 с.

Поступила 31.01.2006

**Рецензент:** доктор технических наук, профессор В.А. Лошаков,  
Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.