

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЯ КОДОВ ФАЗЫ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ЧМ СИГНАЛОВ

Н.П. Кандырин,¹ А.М. Дзигора²

(¹Объединенный научно-исследовательский институт Вооруженных Сил, Харьков,
²Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба)

Рассмотрены особенности построения полиномиальных цифровых вычислителей кодов фазы (ВКФ) простых и сложных сигналов. Получены математические модели ВКФ, применяемых в цифровых синтезаторах сигналов (ЦСС) и для формирования модулирующего напряжения в фазовых модуляторах.

полиномиальный цифровой вычислитель кодов фазы, цифровой синтезатор сигналов, математическая модель

Постановка проблемы. В настоящее время функции синтеза простых и сложных сигналов при модернизации существующих и разработке перспективных образцов радиоэлектронного вооружения возложены, в основном, на цифровые синтезаторы сигналов.

Наиболее перспективными для формирования радиолокационных сигналов с гибким изменением в широких пределах частотно-временных параметров, являются ЦСС вычислительного типа. Основным элементом таких ЦСС является цифровой вычислитель кодов фазы [1 – 5]. При формировании любого вида ЧМ сигнала в ВКФ вычисляется его последовательность кодов фазы, значения которых в дискретные моменты времени определяются номером такта работы устройства. Емкость ВКФ напрямую зависит от требуемой точности установки начальных параметров, их шага перестройки и качества выходных сигналов [2, 4, 5].

Поэтому анализ точности вычисления кодов фазы, особенно на этапе проектирования, с помощью математической модели, которая воспроизводит наиболее важные черты оригинала, является актуальной научно-технической задачей при синтезе как простых, так и сложных ЧМ сигналов.

Анализ литературы. При цифровом формировании сложных радиолокационных сигналов требуемый закон ЧМ или ФМ задается, как правило, в виде степенного многочлена

$$f(t) = \sum_{s=0}^{m-1} B_s t^s ; \quad \varphi(t) = \sum_{s=0}^m C_s t^s . \quad (1)$$

Вычисление значений $\varphi(t_r)$ в дискретные моменты времени $t_r = rT$ можно реализовать алгоритмически на базе универсальных ЭВМ или

микропроцессоров. Однако с точки зрения унификации, миниатюризации, экономичности, быстродействия и надежности, во многих случаях более эффективны специализированные вычислители. К таким устройствам относятся и цифровые синтезаторы сигналов, построенные на основе вычислителей кодов фазы. ВКФ представляет собой полиномиальный функциональный преобразователь информации (ФПИ), воспроизводящий в процессе работы полином [6]

$$K_{\varphi}(r) = \sum_{s=0}^m A_s r^s, \quad (2)$$

для вычисления которого обычно используют схему Горнера [6] (рис. 1).

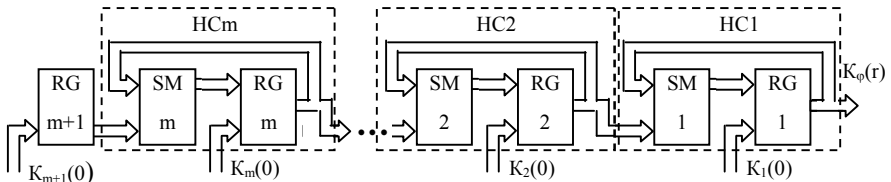


Рис. 1. Структурная схема полиномиального ВКФ (схема Горнера)

Многочлен (2) получается из (1) путем замены переменной $t_r = rT$ с учетом того, что емкость ВКФ эквивалентна 2π , а коды представляют собой целые числа. Связь между коэффициентами A_s и C_s определяется выражением

$$A_s = \frac{C_s T^s N}{2\pi} = \frac{C_s T^s 2^n}{2\pi}, \quad (3)$$

где T – период дискретизации; N и n – емкость и число разрядов ВКФ.

При цифровом синтезе сигналов, когда независимой переменной является время $t_r = rT$, в качестве линейных блоков используются цифровые интеграторы, которые после введения начальных кодов воспроизводят полином (2). В качестве интеграторов в цифровой технике используются накапливающие сумматоры (НС), в которые независимая переменная вводится в виде последовательности тактовых импульсов $r = 1, 2, 3, \dots$

Однако в полиномиальных ЦСС необходимо учитывать, что при подаче кода K_j на j -й НС, соответствующий код фазы на выходе НС1 (рис.1) запаздывает на время $\tau = jT$. Наличие запаздывания не сказывается на законе ЧМ при синтезе сигналов $U(t) = U_0 \sin(C_s t^S)$, когда все коэффициенты полинома, за исключением одного, равны нулю. В противном случае на выходе устройства формируется колебание

$$U(t) = U_0 \sin \left(\sum_{s=0}^m C_s (t - sT)^s \right), \quad (4)$$

закон ЧМ которого не совпадает с заданным.

Указанный недостаток устраняется двумя способами. В первом случае все НС начинают работать одновременно (рис. 2).

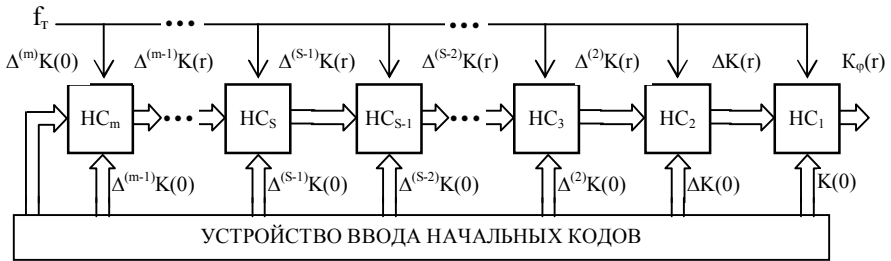


Рис. 2. Структурная схема ВКФ с одновременной синхронизацией НС

Во втором случае (рис. 3) начало работы каждого НС смещается относительно друг друга, и на выходе НС₁ формируется код фазы, в точности равный требуемому, но задержанный на время $t = (m + 1)T$.

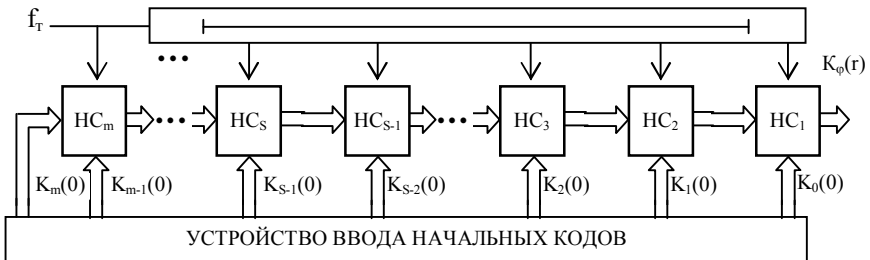


Рис. 3. Структурная схема ВКФ с задержкой синхронизации НС

Процессы вычисления кодов фазы сигналов в ВКФ, в первом и втором случаях частично были рассмотрены в [1, 2, 4], однако для создания их математической модели этого было явно недостаточно.

Целью статьи является разработка математической модели ВКФ, как одного из составных узлов унифицированного синтезатора простых и сложных ЧМ сигналов и формирователя модулирующего напряжения в фазовых модуляторах, для их моделирования на этапе проектирования и разработки.

Основной раздел. Прежде чем найти выражение, описывающее математическую модель ВКФ, для простоты рассуждений, проанализируем его работу по схеме, приведенной на рис. 2.

В регистры накапливающих сумматоров перед началом работы ЦСС вводятся соответствующие начальные коды: $K_\phi(0)$, $\Delta K_\phi(0)$, $\Delta^{(2)}K_\phi(0)$, ..., $\Delta^{(s)}K_\phi(0)$, ..., $\Delta^{(m)}K_\phi(0)$, где $\Delta^{(s)}K_\phi(0)$ – разность порядка s , равная

$$\Delta^{(s)}K_\phi(r) = \Delta^{(s-1)}K_\phi(r+1) - \Delta^{(s-1)}K_\phi(r). \quad (5)$$

С приходом первого тактового импульса ($r = 1$) содержимое каждого предыдущего НС _{s} суммируется с содержимым последующего НС _{$s-1$} , в

регистр которого при этом записывается код – результат сложения

$$\Delta^{(s-2)}K_{\varphi}(1) = \Delta^{(s-2)}K_{\varphi}(0) - \Delta^{(s-1)}K_{\varphi}(0), \quad (6)$$

а содержимое HC_m увеличивается на величину

$$\Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(1) = \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(0) - \Delta^{(m)}K_{\varphi}(0). \quad (7)$$

В регистре последнего HC_1 образуется код фазы $K_{\varphi}(1)$, равный

$$K_{\varphi}(1) = K_{\varphi}(0) + \Delta K_{\varphi}(0). \quad (8)$$

В результате поступления на ВКФ r тактовых импульсов, в регистрах HC установятся коды соответствующих чисел:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(r) = \Delta^{(m-1)}K_{\varphi}(0) + r\Delta^{(m)}K_{\varphi}(0); \\ \dots \\ \Delta^{(s)}K_{\varphi}(r) = \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + \sum_{j=s+1}^m \left[\frac{\Delta^{(j)}K_{\varphi}(0)}{(j-s)!} \prod_{i=0}^{j-s-1} (r-i) \right]; \\ \dots \\ K_{\varphi}(r) = K_{\varphi}(0) + \sum_{j=1}^m \left[\frac{\Delta^{(j)}K_{\varphi}(0)}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} (r-i) \right]. \end{array} \right. \quad (9)$$

Очевидно, что для точного воспроизведения полинома (2) с заданными коэффициентами A_s , необходимо установить функциональную зависимость между ними и начальными значениями $K_{\varphi}(0)$, $\Delta K_{\varphi}(0)$, $\Delta^{(2)}K_{\varphi}(0), \dots, \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0), \Delta^{(m)}K_{\varphi}(0)$, где $s = 1, 2, \dots, m$.

Воспользовавшись выражением, определяющим разность порядка s через значения ординат решетчатой функции $K_{\varphi}(r)$, получаем [6]

$$\Delta^{(s)}K_{\varphi}(r) = \sum_{k=0}^s (-1)^k \cdot K_{\varphi}(r+s-k). \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение для $K_{\varphi}(r)$ и считая $r = 0$, получаем

$$\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) = \sum_{k=0}^s (-1)^k \cdot C_s^k \cdot \sum_{i=1}^m A_i (s-k)^i, \quad (11)$$

где $C_s^k = s! / (k!(s-k)!)$ – число сочетаний из s элементов по k .

Очевидно, что $K_{\varphi}(0) = A_0$, $\Delta^{(0)}K_{\varphi}(0) = A_m m!$, а разности $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$ определяются зависимостью (11). Так, например, для полинома пятой степени $K_{\varphi}(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4 + A_5 r^5$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta^{(5)}K_{\varphi}(0) &= 120A_5; \quad \Delta^{(4)}K_{\varphi}(0) = 24A_4 + 240A_5; \\ \Delta^{(3)}K_{\varphi}(0) &= 6A_3 + 36A_4 + 150A_5; \quad \Delta^{(2)}K_{\varphi}(0) = 2A_2 + 6A_3 + 14A_4 + 30A_5; \\ \Delta K_{\varphi}(0) &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5; \quad K_{\varphi}(0) = A_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Начальные условия, получаемые из (12), вводятся в ВКФ округленными до целых чисел, что обуславливает погрешность округления, зависящую от разрядности регистров НС. Вследствие округления, каждый из начальных кодов будет выражаться с ошибкой, и вместо значений $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$ и $K_s(0)$ в интеграторы вводятся числа

$$K_s^*(0) = \Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + \delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)] = \text{ent}\{\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0) + 0,5\}, \quad (13)$$

где $\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)$ и $K_s(0)$ – требуемые значения начальных кодов; $\delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)]$ и $\delta[K_s(0)]$ – погрешности округления; $\text{ent}\{\}$ – оператор выделения целой части числа.

По абсолютной величине погрешности $\delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)]$ и $\delta[K_s(0)]$, очевидно, не должны превышать половины единицы младшего разряда НС, т.е.

$$\delta[\Delta^{(s)}K_{\varphi}(0)] \leq (2^{n+1})^{-1}; \quad \delta K_s(0) \leq (2^{n+1})^{-1}$$

Так как НС имеют ограниченную разрядность, то на выходе ВКФ формируется последовательность кодов фазы по модулю $N = 2^n$.

Таким образом, математическая модель ВКФ, представленного на рис. 2, будет иметь следующий вид

$$K_{\varphi}(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[\frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r-i) \right] - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left(K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[\frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r-i) \right] \right) \right\}, \quad (14)$$

где начальные коды $K_s^*(0)$, предварительно записываемые в регистры НС, рассчитываются согласно (13). Вычитание в (14) реализуется автоматически при переполнении ВКФ, емкость которого эквивалентна 2π радиан.

Рассуждая аналогичным образом, получаем математическую модель ВКФ, представленного на рис. 3:

$$K_{\varphi}(r) = K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[\frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r+i) \right] - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left(K_0^*(0) + \sum_{s=1}^m \left[\frac{K_s^*(0)}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (r+i) \right] \right) \right\}, \quad (15)$$

где начальные коды $K_s^*(0)$ рассчитываются согласно выражения

$$K_s^*(0) = K_s(0) + \delta[K_s(0)] = \text{ent}\{K_s(0) + 0,5\}.$$

Например, при цифровом формировании ЛЧМ сигнала закон изменения его фазы описывается полиномом второй степени ($m = 2$)

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2\pi f_{\text{н}} t + \pi \beta t^2,$$

а минимальный по аппаратным затратам ВКФ содержит два НС и в процессе работы воспроизводит последовательность кодов фазы (рис. 4)

$$K_{\varphi}(r) = K_{\varphi_0} + rK_{f_{\text{н}}} + \frac{r(r-1)}{2} K_{\beta} - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \left[K_{\varphi_0} + rK_{f_{\text{н}}} + \frac{r(r-1)}{2} K_{\beta} \right] \right\},$$

где K_{φ_0} , K_{f_H} и K_{β} – соответственно, код начальной фазы, частоты и скорости ЧМ, определяемые соотношениями:

$$K_{\varphi_0} = \text{ent} \left\{ \frac{\varphi_0 N}{2\pi} + 0,5 \right\}; \quad K_{f_H} = \text{ent} \left\{ \frac{f_H N}{f_T} + \frac{\beta N}{2f_T^2} + 0,5 \right\}; \quad K_{\beta} = \text{ent} \left\{ \frac{\beta N}{f_T^2} + 0,5 \right\}.$$

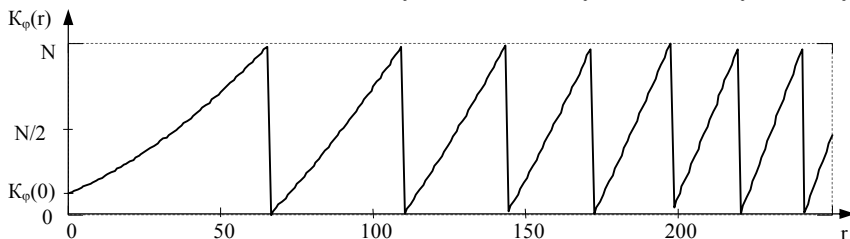


Рис. 4. Диаграмма работы ВКФ при $m=2$

Таким образом, полиномиальную последовательность кодов фазы любого сигнала можно воспроизвести цепочкой цифровых накопителей.

Выводы. Полученные математические модели ВКФ однозначно связаны с начальными параметрами формируемых ЧМ сигналов и позволяют моделировать процессы формирования в них кодов фазы сигналов любой сложности. При этом учитываются и ошибки округления начальных кодов, обусловленные ограниченной разрядностью накапливающих сумматоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочемасов В.Н., Белов Л.А., Окочешников В.С. Формирование сигналов с линейной частотной модуляцией. – М.: Радио и связь, 1983. – 192 с.
2. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. Методика определения параметров цифровых синтезаторов по величине искажений сжатых ЛЧМ сигналов в РЛС различного назначения // Системы обработки информации. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вып. 4 (20). – С. 219-224.
3. А.С. 1578799 (СССР). Цифровой синтезатор частот / Н.П. Кандырин, Ю.М. Романов, С.А. Соколов. – Опубл. в Б.И., 1990, № 26.
4. Зайцев А.Л. Цифровые синтезаторы сигналов с частотной модуляцией и их применение при радиофизических исследованиях планет. – Дисс. канд. техн. наук. – М.: ИРЭ АН СССР. – 1980. – 231 с.
5. Кандырин Н.П., Дзигора А.М. К вопросу о расширении частотного диапазона формируемых сигналов в цифровых синтезаторах // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, НАНУ, ПАНМ. – 2002. – Вып. 5 (21). – С. 88-92.
6. Смоллов В.Б. Функциональные преобразователи информации. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. – 248 с.

Поступила 31.01.2006

Рецензент: доктор технических наук, профессор В.А. Лошаков,
Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.