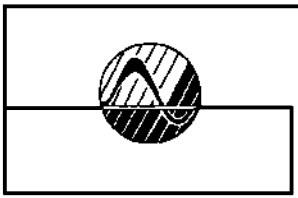



УДК 519.6

# МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Е.С. Листровая
(Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков)

*Разработан метод, позволяющий на основе предложенного инварианта в виде конструкций, представляющих разложение графа по его вершинным покрытиям, строить эффективные алгоритмы для решения задач определения изоморфизма произвольных графов.*

***граф, изоморфизм графов, вершинное покрытие, инвариант***

**Введение.** Задача определения изоморфизма графов является важной задачей при анализе и синтезе сложных систем управления [1 – 3]. Задачи определения изоморфизма графов и подграфов охватывают довольно широкий круг проблем, таких как автоматизация контроля в САПР БИС, создание реляционных систем баз данных дискретных образов, эквивалентные преобразования граф-схем алгоритмов и т.д. Среди теоретических задач, которые базируются на решении задачи изоморфизма графов и подграфов, можно выделить анализ и конструктивное перечисление графов с заданными ограничениями на группы и подгруппы их автоморфизмов; исследование симметрии графов; исследование полноты инвариантов графов при идентификации по заданному отношению эквивалентности и т.д. Перечисленные проблемы и основные теоретические задачи, в основе которых лежит задача определения изоморфизма графов, свидетельствуют об актуальности построения алгоритмов её решения. Алгоритмы, распознающие изоморфизм произвольных графов, называются GI-алгоритмами, таких алгоритмов сейчас известно более 40 [1], однако все они экспоненциальные. Известны и полиномиальные алгоритмы, но только для специальных классов графов. Среди них представляют наибольший интерес алгоритмы Бабаи, Лакса и Лас Вегас алгоритмы, которые могут и не выдать ответа с вероятностью менее 0,5.

Два графа G и G' изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между вершинами G и G', такое, что две вершины u и v смежны в G тогда и только тогда, когда в G' смежны соответствующие им вершины. Точнее, граф G = (V, E) изоморфен графу G' = (V', E') – это записывается в виде G ≈ G',– если существует взаимно однозначная функция h из V в V', обладающая тем свойством, что (u, v)∈E тогда и только тогда, когда (h(u), h(v)) ∈ T\E'.

Проблема определения, являются ли два графа изоморфными, оказалась достаточно трудной. Фактически даже для небольших графов эту задачу решить нелегко. Поэтому представляется актуальной разработка алгоритмов полиномиальной сложности для решения данной задачи.

Для установления изоморфизма графов необходим инвариант, на основе которого мы можем установить изоморфизм графов. Пусть f – функция, относящая каждому графу G некоторый элемент f(G) из множества M произвольной природы. Эту функцию называют инвариантом, если на изоморфных графах G и G' (G ≅ G') ее значения совпадают, т.е. для любых G и G'

$$G \cong G' \Rightarrow f(G) = f(G').$$

Инвариант f называется полным, если для любых G и G'

$$f(G) = f(G') \Rightarrow G \cong G'.$$

Объединяя оба определения, можно назвать полным инвариантом графа такую функцию f(G) (со значениями в произвольном множестве), для которой f (G) = f (G') тогда и только тогда, когда G ≅ G'. Наиболее известными полными инвариантами для определения изоморфизма графов являются мини-коды μ(G) и макси-коды $\mu^*(G)$ матрицы смежности [1]. Хотя из равенства μ(G) = μ(G') следует G ≅ G'.

Процесс вычисления данных инвариантов для заданного n-вершинного графа столь же труден, как и лобовой перебор n! соответствий вершин двух графов, поскольку надо выбрать наименьший из двоичных кодов всех n! матриц смежности графов и лишь в некоторых случаях удается избежать полного перебора [1]. Следует отметить, что тезис о том, что получить полный инвариант для класса всех графов вообще невозможно, не только не доказан но и не сформулирован строго математически и поиски в этом направлении продолжаются. В 1975 году В.Г. Визинг [4] нашел изящную конструкцию, названную им модульным произведением графов, близкие построения предложены позже в [5]. Однако эти и другие конструкции не решают проблему изоморфизма, а лишь сводят ее к другой задаче, не менее сложной (несмотря на кажущуюся простоту). Мы не можем категорически утверждать, что всякий инвариант графа, либо не является полным, либо требует для своего вычисления практически неэффективной процедуры типа полного перебора порядка n! или, скажем, $2^n$, однако до сих пор дело обстояло так. Это заставляет искать другие пути. В данной работе сделана такая попытка.

**Постановка и решение задачи.** Используем конструкцию для произвольного графа G, введенную в [6] при решении задачи о минимальном вершинном покрытии и минимальном независимом множестве, которую назовем разложением произвольного графа по его вершинным покрытиям. Опишем процедуру А, позволяющую построить такую конструкцию графа G, заданного списком ребер.

**Процедура А.** Предварительно перед работой процедуры сформируем множество степеней вершин графа {S}, а переменной присвоим начальное значение X: = 1.

***Шаг 1.*** Удаляем вершину Vi := X и просматриваем все ребра графа {R}, из тех ребер, в которые она входит выписываем номера вершин, формируем множество вершин $\{L_x\}$, при этом просмотренные ребра исключаем из дальнейшего анализа и уменьшаем степени вершин {S}, которые входили в удаленные ребра. Проверяем массив {S}, если степени всех вершин {S} = {0}, то переходим к шагу 4, а если {S} = {1, 0}, то переходим к шагу 3.

***Шаг 2.*** Просматривая оставшиеся ребра R, выбираем вершину, которая имеет большую степень {S}, и включаем ее в множество $\{L_x\}$, а ребра {R}, в которые она вошла, исключаем из дальнейшего анализа и уменьшаем степени вершин {S}. Если в процессе вычислений имеется несколько вершин с большей степенью, то проверяем их на связность между собой, и те вершины, которые не связаны между собой W(i, j) = 0, добавляем в предыдущее множество $\{L_x\}$, а ребра, в которые они входят, исключаем из дальнейшего анализа и уменьшаем степени вершин {S}. Проверяем множество {S}, если степени всех вершин {S} = {0}, то переходим к шагу 4 , а если {S} = {1, 0}, то переходим к шагу 3, иначе – к шагу 2.

***Шаг 3.*** Образуем конструкцию, состоящую из объединения подмножества $\{L_x\}$ и двудольного графа $D_x$ образованного оставшимися ребрами с вершинами встречающимися в них по одному разу каждая, проверяем есть среди образовавшихся конструкций такие же, если нет, то мы ее оставляем, а если есть, то удаляем и переходим к следующему шагу.

***Шаг 4.*** Проверяем X > n , если да, то процедура заканчивает работу, если нет, то X: = X + 1 и переходим к выполнению шага 1.

В результате работы процедуры для всех вершин X = (1,…n) в общем случае получаем n-пар объединений вида $(L_x \cup D_x)$ , которые представим в виде следующей конструкции Q:

$$Q = (L_1 \cup D_1) \vee (L_2 \cup D_2) \vee \ldots \vee (L_n \cup D_n). \qquad (1)$$

Процедуру А можно рассматривать как процесс перемножения скобок в конъюнктивном представлении графа, соответствующем (1), остановленный на определенном этапе. Нетрудно видеть, что в булевой алгебре для функции f, определяемой соотношением (1), справедливо равенство

$$f(V_1,V_2\ldots V_n) = f(V_1 = 0,V_2\ldots V_n) \vee f(V_1,V_2 = 0\ldots V_n) \vee\ldots\vee f(V_1,V_2\ldots V_n = 0). \quad (2)$$

Соотношение (2) соответствует тому, что в процедуре А выполнение шагов 1 и 2 осуществляется сначала без первой вершины, затем без второй и т.д. без n-й вершины. Если мы рассматриваем соотношение (1) без i-й вершины, то те скобки, которые содержали вершину i превращаются в некоторый сомножитель вида $V_jV_r\ldots V_p$. Этот сомножитель поглощает все скобки, в которые входят вершины $V_j$ ,$V_r$ и т.д. $V_p$. Так, например, для графа приведенного на рис. 1, функция (1) имеет вид

$$f = (V_1 \vee V_6)\,(V_1 \vee V_7)\,(V_2 \vee V_5)\,(V_2 \vee V_7)\,(V_3 \vee V_4)\,(V_3 \vee V_7). \quad (3)$$

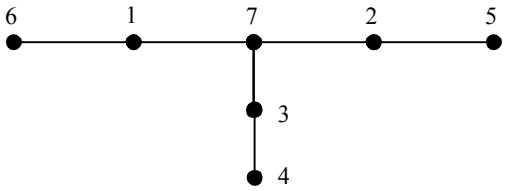


Рис. 1. Граф G

Если соотношение (3) рассматривать без 1-й вершины, то получим

$$f = V_6\,V_7\ (V_2 \vee V_5)\,(V_2 \vee V_7)\,(V_3 \vee V_4)\,(V_3 \vee V_7) = V_6V_7\ (V_2 \vee V_5)\,(V_3 \vee V_4). \quad (4)$$

В (4) скобки $(V_2 \vee V_7)$ и $(V_3 \vee V_7)$ поглощены сомножителем $V_6V_7$. Сравнивая (4) с (3), видно, что процесс умножения остановлен в момент, когда в скобках остаются вершины, которые встречаются по одному разу, т.е. в конечном виде конструкции (1) будет соответствовать булева функция

$$\begin{aligned} f = {} & V_6\,V_7\,(V_2 \vee V_5)\,(V_3 \vee V_4) \vee V_5V_7\,(V_1 \vee V_6)\,(V_3 \vee V_4) \vee \\ & \vee V_4\,V_7\,(V_1 \vee V_6)\,(V_2 \vee V_5) \vee V_3V_7(V_1 \vee V_6)(V_2 \vee V_5) \vee \\ & \vee V_2V_7(V_1 \vee V_6)(V_3 \vee V_4) \vee V_1V_7(V_2 \vee V_5)(V_3 \vee V_4) \vee V_1V_2V_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Если в (5) раскрыть скобки и привести подобные, то в соответствии с теоремой приведенной в [6] мы получим перечень всех вершинных покрытий графа. Выделим в конструкции (1) пару $L_i$, $D_i$ . Пусть в графе $D_i$ m вершин, тогда на основе данной пары могут быть построены за счет добавки к вершинам, содержащимся в $L_i$, $2^{m/2} - 1$ комбинаций из вершин графа $D_i$. Таким образом, конструкция (1), построенная для произвольного графа, потенциально содержит в себе все вершинные покрытия графа, а, следовательно, и все независимые множества графа. Эти покрытия мы просто не перечисляем из-за их экспоненциального числа. Весь перечень покрытий и соответственно независимых множеств однозначно определяют структуру графа и, очевидно, что конструкция (1) не зависит от нумерации вершин графа. Следовательно, если мы имеем дело с двумя изоморфными графами, отличающимися только нумерацией вершин, то конструкции обеих графов, определяемые соотношением (1),

должны быть одинаковы и различными, если графы неизоморфны, так как у неизоморфных графов перечень вершинных покрытий различен. Поставим в соответствие каждой паре $L_i$, $D_i$ в (1) пару чисел ($\alpha$, $\omega$), равную соответственно числу вершин в $L_i$ и $D_i$. В общем случае число таких пар чисел для описания конструкции (1) не превысит n. Ясно, что, если два графа G и $G^{/}$ изоморфны, то и подмножества пар $\{(\alpha, \omega)\}$; $\{(\alpha, \omega)^{/}\}$, описывающих конструкции (1) графов G и $G^{/}$, должны быть одинаковы. Следовательно, для установления изоморфизма двух произвольных графов G и $G^{/}$ достаточно построить для них конструкции (1), по которым сформируем подмножества пар чисел $\{(\alpha, \omega)\}$; $\{(\alpha, \omega)^{/}\}$ и, если они окажутся, равны, то значит их конструкции (1) одинаковы и графы G и $G^{/}$ изоморфны. Поскольку число ребер в графе не может превысить $n\cdot(n-1)/2$, то общее число операций сравнения и объединения при реализации процедуры А не может превысить $n^3$, а при сравнении массивов $\{(\alpha,\omega)\}$ и $\{(\alpha,\omega)^{/}\}$ – $2\cdot n^2$ операций сравнения, таким образом процедура установления изоморфизма двух произвольных графов на основе предложенного инварианта не превысит $O(n^3)$. К сожалению, на основе данного инварианта нельзя указать подстановку, переводящую матрицу смежности графа G в матрицу смежности графа G, если $G \cong G$.

Экспериментальное исследование алгоритма использующего для установления изоморфизма графов в качестве инварианта конструкцию (1) показало, что она позволяет установить изоморфизм графов за число шагов в среднем не превышающее $O(n^3)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 380 с.*
2. *Листровой С.В., Певнев В.Я., Тяжлов А.Г. Параллельный алгоритм определения изоморфизма графов // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – 03, № 2. – С. 111-113.*
3. *Листровой С.В., Дробот О.А, Тимочко А.И. Алгоритм для идентификации изображений, работающий в масштабе реального времени // Искусственный интеллект. – Донецк: ИПИИ, 2003. – С. 173-178.*
4. *Визинг В.Г. Реферативный журнал «Математика». – 1В529, 1975. – 135 с.*
5. *Kozen O., Akinniyi F.A. Реферативный журнал «Математика». – 4В427, 1979.*
6. *Листровой С.В., Яблочков С.В. Метод решения задачи определения минимальных вершинных покрытий и независимых максимальных множеств // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, № 2. – С. 31-40.*



*Поступила 1.02.2005*

**Рецензент:** доктор физико-математических наук, профессор С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.