



## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

УДК 519.859

### ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

Л.Г. Евсева  
(Полтавский военный институт связи)

*С учетом погрешностей исходных данных строится математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения, в которой размещаемые ориентированные объекты и область размещения имеют пространственную форму прямоугольного параллелепипеда. Учет погрешностей осуществляется на основе использования элементов интервальной геометрии.*

***комбинаторная оптимизационная задача размещения, ориентированные объекты, пространственная форму прямоугольного параллелепипеда***

**Введение.** При решении оптимизационных задач проектирования [1] учитываются их геометрические особенности: начальные данные, включающие информацию о формах, размерах геометрических объектов, технологические ограничения при размещении этих объектов, а также функцию цели данной оптимизационной задачи. В реальном мире все измерения выполняются с некоторыми погрешностями.

Моделированию и решению идеализированной (без учета погрешностей) оптимизационной задачи размещения параллелепипедов посвящены, например, работы [2, 3]. Однако математические модели идеализированных задач не являются адекватными и не отражают важных особенностей задачи в исходной постановке. Поэтому получаемое решение, в общем случае, является лишь допустимым решением. В данной работе предлагается подход к учету погрешностей на основе применения таких понятий интервальной геометрии [4, 5], как интервальная прямая, интервальная гиперплоскость, интервальный параллелепипед, интервальное касание и интервальное расстояние между выпуклыми интервальными многогранниками, а также понятия элементарного интервального отображения.

Кроме того, оптимизационная задача размещения параллелепипедов рассматривается как комбинаторная оптимизационная задача, что позволит в дальнейшем для реализации ее математической модели использовать известные методы комбинаторной оптимизации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в следующей постановке. Пусть имеется конечный набор ориентированных прямоугольных параллелепипедов (в дальнейшем, «параллелепипедов»)  $P_i \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , которые однозначно определяются кортежами геометрической информации вида  $g_i = \{P_i, (a_i, b_i, c_i)\}$ ,  $i \in J_n$ , и область  $P_0 \subset \mathbb{R}^3$  длиной  $a_0$ , шириной  $b_0$  и переменной высотой  $c_0$ .

Пусть длина  $a_i$  параллелепипеда  $P_i$ ,  $i \in J_n$  имеет исходную погрешность  $v_{a_i}$  по оси абсцисс, ширина  $b_i$  – погрешность  $v_{b_i}$  по оси ординат, высота  $c_i$  – погрешность  $v_{c_i}$  по оси аппликат. Длина  $a_0$ , ширина  $b_0$  области размещения  $P_0$  заданы с погрешностями  $v_{a_0}, v_{b_0}$  соответственно, причем выполняются неравенства  $a_0 \geq a_i$ ,  $b_0 \geq b_i$ ,  $i \in J_n$ .

В данной работе полагаем, что справедливы соотношения:

$$a_i = a, b_i = b, \forall i \in J_n. \quad (1)$$

Параллелепипеды  $P_i$ ,  $i \in J_n$  ориентированы так, что их основания параллельны основанию параллелепипеда  $P_0$ . Полагаем, что начала собственных систем координат параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in J_n^0$  расположены в вершинах нижнего основания  $(\langle 0, v_{a_i} \rangle, \langle 0, v_{b_i} \rangle, \langle 0, v_{c_i} \rangle)$ ,  $i \in J_n^0$  и при размещении параллелепипедов допускается лишь трансляция параллелепипеда  $P_i$ ,  $i \in J_n$  на вектор  $u_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ . Параллелепипед  $P_i$ ,  $i \in J_n$ , с параметрами размещения  $u_i$  обозначим  $P_i(u_i)$ .

**Замечание 1.** Под величиной  $c_0$  будем понимать число

$$c_0 = \max \left\{ c_t, \sum_{i=1, i \neq t}^n c_i \right\}, \text{ где } c_t = \max_{1 \leq i \leq n} c_i.$$

**Замечание 2.** В данном исследовании считаем, что погрешность  $v_{c_0}$  задания  $c_0$  равна нулю, т.е.  $v_{c_0} = 0$ .

**Замечание 3.** Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что выполняются соотношения:

$$0 \leq v_{a_i} \leq \varepsilon \cdot a; 0 \leq v_{b_i} \leq \varepsilon \cdot b; 0 \leq v_{c_i} \leq \varepsilon \cdot c_i, \forall i \in J_n^0,$$

где значение числа  $\varepsilon \in (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$  характеризует точность задания исходных данных и зависит от конкретной задачи.

Необходимо, приняв во внимание погрешности исходных данных и исходя из особенностей задачи (все параллелепипеды имеют одинаковую длину  $a$  и одинаковую ширину  $b$ ), выполнить разбиение области размещения  $P_0 \subset R^3$  конечным числом плоскостей, параллельных координатным плоскостям  $xOz$  и  $yOz$  на максимально возможное число подобластей, имеющих форму параллелепипеда, с метрическими характеристиками  $(a, b, c_0)$ , и разместить множество параллелепипедов  $P_i, i \in J_n$ , в полученных подобластях таким образом, чтобы высота  $h$  занятой части области  $P_0$  и ее погрешность  $v_h$  достигали своего минимального значения  $(h^*, v_h^*)$ .

**Для формализации задачи рассмотрим некоторые понятия и определения.** Учитывая гомеоморфизм евклидова пространства  $R^2$  и расширенного пространства централизованных интервалов  $I_s R$  [4], установим биекцию между точками интервального пространства  $I_s^3 R = I_s R \times I_s R \times I_s R$  [6] и исходными данными задачи следующим образом:

$$R^2 \ni (x, v_x) \leftrightarrow \langle x, v_x \rangle \in I_s R; \quad (2)$$

$$R^6 \ni (x, v_x, y, v_y, z, v_z) \leftrightarrow (\langle x, v_x \rangle, \langle y, v_y \rangle, \langle z, v_z \rangle) \in I_s^3 R.$$

Тогда соответствия между элементами множества исходных данных и элементами пространства  $I_s R$  будут иметь вид:

$$(a_i, v_{a_i}) \leftrightarrow \langle a_i, v_{a_i} \rangle = \langle A_i \rangle, (b_i, v_{b_i}) \leftrightarrow \langle b_i, v_{b_i} \rangle = \langle B_i \rangle;$$

$$(c_i, v_{c_i}) \leftrightarrow \langle c_i, v_{c_i} \rangle = \langle C_i \rangle, i \in \{0\} \cup J_n = J_n^0.$$

За интервальный ноль примем  $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \in I_s R$ .

Тогда, как следует из постановки задачи, а также в соответствии с отношением линейного порядка в пространстве  $I_s R$  [4, 5]

$$\forall \langle X \rangle \in I_s R, \forall \langle Y \rangle \in I_s R: \langle X \rangle \leq \langle Y \rangle \Leftrightarrow (x < y) \vee ((x = y) \wedge (v_x \leq v_y))$$

справедливы следующие интервальные неравенства [4, 5]:

$$\langle A_i \rangle \geq \mathbf{0}; \langle B_i \rangle \geq \mathbf{0}; \langle C_i \rangle \geq \mathbf{0}, i \in J_n^0.$$

**Замечание 4.** С учетом замечания 3 поставленная задача рассматривается на множестве  $\Omega = I_{s1} \times I_{s1} \times I_{s1} \subset I_s^3 R$ , где

$$I_{s1} = \text{int } I_{s1} = \{ \langle x, v_x \rangle \in I_s R \mid x - |v_x| > 0 \}.$$

Пусть, следуя работе [7], на множестве  $\Omega \subset I_s^3 R$  задана интервальная метрика вида:

$$\rho(U_1, U_2) = \sqrt{\rho_x^2(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) + \rho_y^2(\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle) + \rho_z^2(\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle)} \quad (3)$$

где  $\rho_x(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle) = \left\langle \left| x_1 - x_2 \right|, \left| v_{x_1} - v_{x_2} \right| \right\rangle$ ;  $\rho_y(\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle) = \left\langle \left| y_1 - y_2 \right|, \left| v_{y_1} - v_{y_2} \right| \right\rangle$ ;

$\rho_z(\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle) = \left( \left| z_1 - z_2 \right|, \left| v_{z_1} - v_{z_2} \right| \right)$  – интервальные расстояния [7] по осям  $O(X)$ ,  $O(Y)$  и  $O(Z)$  соответственно между точками:

$$U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) = (\langle x_i, v_{x_i} \rangle, \langle y_i, v_{y_i} \rangle, \langle z_i, v_{z_i} \rangle) \in \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}, \quad i = 1, 2;$$

$$\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}; \quad \langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}; \quad \langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}.$$

Рассмотрим в  $\mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$  интервальную гиперплоскость [9]  $\Pi \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ , которая задается интервальным уравнением

$$\varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где  $U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ ;  $a, b, c \in \mathbf{R}^1$ ;  $\langle D \rangle = \langle d, v_d \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ ;

$$\varphi(\lambda \cdot \langle X \rangle) = \begin{cases} \lambda \cdot \langle X \rangle, & \text{если } \lambda \geq 0; \\ \lambda \cdot \overline{\langle X \rangle}, & \text{если } \lambda < 0; \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbf{R}^1, \quad \langle X \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}.$$

Интервальное уравнение (4) назовем нормальным интервальным уравнением интервальной гиперплоскости, если  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  и  $\langle D \rangle \leq \mathbf{0}$ .

На основании определения ориентированной поверхности в арифметическом евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$  введем определение ориентированной интервальной поверхности в интервальном пространстве  $\mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ .

**Определение 1.** Интервальное уравнение  $\omega(U) = \mathbf{0}$ ,  $U \in \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$  назовем ориентированным интервальным уравнением интервальной поверхности  $F \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ , если функция  $\omega(U)$  определена на некотором множестве  $\Omega \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$  и знаки значений функций противоположны на интервальных множествах  $F^+ \subset \Omega$  и  $F^- \subset \Omega$ , то есть  $\omega(U_1) \cdot \omega(U_2) < \mathbf{0}$  для любых  $U_1 \in F^+$  и  $U_2 \in F^-$ ,  $\mathbf{fr}F^+ = \mathbf{fr}F^- = F$ , где  $\mathbf{fr}F$  – интервальная граница.

Составим два интервальных множества:

$$\Pi^+ : \varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle > \langle 0 \rangle; \quad \Pi^+ \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R};$$

$$\Pi^- : \varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle < \langle 0 \rangle; \quad \Pi^- \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R},$$

на которые интервальная гиперплоскость  $\Pi \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ , заданная интервальным уравнением (4), разделяет интервальное пространство  $\mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ .

Понятно, что  $\Pi = \mathbf{fr}\Pi^+$ ,  $\Pi = \mathbf{fr}\Pi^-$ , здесь  $\mathbf{fr}M$  – интервальная граница [5] интервального множества  $M \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$ . Нетрудно проверить, что интервальное уравнение (4) удовлетворяет требованиям определения 1 на множестве  $\Omega \subset \mathbf{I}_s^3 \mathbf{R}$  и его можно считать ориентированным нормальным интервальным

уравнением интервальной гиперплоскости  $\Pi \subset \mathbf{I}_S^3\mathbf{R}$ . Чтобы изменить ориентацию гиперплоскости, заданной (4), необходимо привести его к виду:

$$\varphi(-a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(-b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(-c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle = \mathbf{0}.$$

Пусть  $\chi_j(U) = \mathbf{0}$ ,  $j \in J_6$  – ориентированные нормальные интервальные уравнения интервальных гиперплоскостей  $\Pi_j$ , участвующих в формировании интервальной границы  $\mathbf{frP}$  интервального параллелепипеда  $P \subset \mathbf{I}_S^3\mathbf{R}$ .

Тогда  $\mathbf{frP}$  определяется интервальным уравнением

$$\chi(U) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

где 
$$\chi(U) = \max_{j=1,2,\dots,6} \chi_j(U). \quad (6)$$

**Определение 2.** Интервальным параллелепипедом  $P \subset \mathbf{I}_S^3\mathbf{R}$  называется интервальное множество, точки которого удовлетворяют условию  $\chi(U) \leq \mathbf{0}$ . Иначе,

$$P = (\mathbf{I}_S^3\mathbf{R} \setminus \text{cl}P) \cup \mathbf{frP}; \quad P = \{U \in \mathbf{I}_S^3\mathbf{R} \mid \chi(U) \leq \mathbf{0}\}, \quad (7)$$

где  $\chi(U)$  определяется выражением (6).

В арифметическом евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{I}_S^3\mathbf{R}$  выражения (5) – (7) определяют параллелепипед длиной  $a_i$ , шириной  $b_i$ , высотой  $c_i$ , начало собственной системы координат которого находится в вершине его нижнего основания.

Составим ориентированные интервальные уравнения  $\chi_{ij}(U) = \mathbf{0}$  интервальных гиперплоскостей  $\Pi_{ij}$ ,  $i \in J_n$ ,  $j \in J_6$ , участвующих в формировании интервальной границы интервального параллелепипеда  $P_i$ :

$$\begin{aligned} \chi_{i1}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) &= \langle X \rangle - \overline{\langle A_i \rangle}; & \chi_{i2}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) &= \langle Y \rangle - \overline{\langle B_i \rangle}; \\ \chi_{i3}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) &= \langle Z \rangle - \overline{\langle C_i \rangle}; & \chi_{i4}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) &= -\overline{\langle X \rangle} + \langle 0, v_{a_i} \rangle; \\ \chi_{i5}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) &= -\overline{\langle Y \rangle} + \langle 0, v_{b_i} \rangle; & \chi_{i6}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) &= -\overline{\langle Z \rangle} + \langle 0, v_{c_i} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда в качестве математической модели параллелепипеда  $P_i \subset \mathbf{R}^3$ ,  $i \in J_n^0$  длиной  $a_i$ , имеющей исходную погрешность  $v_{a_i}$  по оси абсцисс, шириной  $b_i$ , имеющей исходную погрешность  $v_{b_i}$  по оси ординат, и высотой  $c_i$ , имеющей исходную погрешность  $v_{c_i}$  по оси аппликат, можно принять интервальный параллелепипед  $P_i = (\mathbf{I}_S^3\mathbf{R} \setminus \text{cl}P_i) \cup \mathbf{fr}P_i \subset \mathbf{I}_S^3\mathbf{R}$ ,  $i \in J_n^0$ , который задается выражениями (6) – (8).

На основе отношения линейного порядка в пространстве  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$  [2] и по аналогии с определением минимума конечного набора элементов пространства  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$  определим максимум множества элементов пространства  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ .

**Определение 3.** Максимумом конечного набора элементов пространства  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$  называется  $\langle X^* \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ :

$$\langle X^* \rangle = \langle X_j \rangle = \max \{ \langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle \}, \quad j \in J_n,$$

где  $\langle X^* \rangle = \langle x^* = x_j = \max_{i=1,2,\dots,n} \{x_i\}, v_x^* = v_{x_j} \rangle$ , если  $x_i \neq x_j, i \neq j, i \in J_n$ ,

$\langle X^* \rangle = \langle x^* = x_j, v_x^* = v_{x_j} = \max_{i=1,2,\dots,n} \{v_{x_i}\} \rangle$ , если  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x^*$ ,

$\langle X^* \rangle = \langle x^* = x_j, v_x^* = v_{x_j} = \max_{t=1,2,\dots,m} \{v_{x_{i_t}}\} \rangle$ , если  $x_{i_1} = \dots = x_{i_m} = x^*, i_t \in J_n, m < n$ .

Пусть  $\langle A_\alpha \rangle = \max_{1 \leq i \leq n} \langle A_i \rangle, \alpha \in J_n, \langle B_\beta \rangle = \max_{1 \leq i \leq n} \langle B_i \rangle, \beta \in J_n$  – максимумы конечных множеств  $\{ \langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots, \langle A_n \rangle \}$  и  $\{ \langle B_1 \rangle, \langle B_2 \rangle, \dots, \langle B_n \rangle \}$ ,  $\langle A_i \rangle, \langle B_i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, i \in J_n$  берутся в соответствии с определением 3. Исходя из условия (1), имеем третий случай в определении максимума конечного набора элементов пространства  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ .

Осуществим разбиение основания параллелепипеда  $\mathbf{P}_0$  на  $p = k \cdot m$  интервальных прямоугольников, где число  $k$  и  $m$  интервальных полос по координатным осям  $O\langle X \rangle$  и  $O\langle Y \rangle$  соответственно, основываясь на введенной в  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$  операции интервального деления [2] и определении целой части интервального числа [9], вычисляются по формулам:

$$k \in [k_{\min}, k_{\max}]; \quad m \in [m_{\min}, m_{\max}];$$

$$k_{\min} = \left\lfloor (a_0 - v_{a_0}) / (a + v_{a_\beta}) \right\rfloor; \quad k_{\max} = \left\lceil (b_0 + v_{b_0}) / (b - v_{b_\beta}) \right\rceil; \quad (9)$$

$$\langle k \rangle = \left[ \langle B_0 \rangle / \langle B_\beta \rangle \right] = \left\langle \left( \left[ \frac{b_0 - v_{b_0}}{b_0 + v_{b_\beta}^0} \right] + \left[ \frac{b_0 + v_{b_0}}{b_0 - v_{b_\beta}^0} \right] \right) / 2; \left( \left[ \frac{b_0 + v_{b_0}}{b_0 - v_{b_\beta}^0} \right] - \left[ \frac{b_0 - v_{b_0}}{b_0 + v_{b_\beta}^0} \right] \right) / 2 \right\rangle;$$

$$m_{\min} = \left\lfloor (w - v_w) / (a + v_{a_\alpha}) \right\rfloor; \quad m_{\max} = \left\lceil (w + v_w) / (a - v_{a_\alpha}) \right\rceil; \quad (10)$$

$$\langle m \rangle = \left[ \langle A_0 \rangle / \langle A_\alpha \rangle \right] = \left\langle \left( \left[ \frac{a_0 - v_{a_0}}{a + v_{a_\alpha}} \right] + \left[ \frac{a_0 + v_{a_0}}{a - v_{a_\alpha}} \right] \right) / 2; \left( \left[ \frac{a_0 + v_{a_0}}{a - v_{a_\alpha}} \right] - \left[ \frac{a_0 - v_{a_0}}{a + v_{a_\alpha}} \right] \right) / 2 \right\rangle,$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x \in \mathbf{R}^1$ .

Если  $k_{\min} = k_{\max}$ ,  $m_{\min} = m_{\max}$ , существует единственный вариант разбиения. Построим гиперплоскости, интервально параллельные координатным плоскостям  $\langle X \rangle O \langle Z \rangle$  и  $\langle Y \rangle O \langle Z \rangle$ , интервальные уравнения которых соответственно имеют вид:

$$\langle X \rangle - i \cdot \overline{\langle A_{\alpha} \rangle} = \langle 0 \rangle \text{ и } \langle Y \rangle - j \cdot \overline{\langle B_{\beta} \rangle} = \langle 0 \rangle, \quad i \in J_k, j \in J_m.$$

Положим  $k = k_{\min}$ ,  $m = m_{\min}$ .

Получим разбиение  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_0^* \times \mathbf{P}_0^{**} \subset \mathbf{P}_0 \subset \mathbf{I}_S^2 \mathbf{R}$  на  $p = k \cdot m$  интервальных параллелепипедов.

Интервально касающиеся множества  $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{P}_0$ ,  $i \in J_k$ ,  $j \in J_m$  таковы, что:

$$\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m \mathbf{P}_{ij} \subseteq \mathbf{P}_0; \quad \bigcup_{i=1}^k \mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_0^*, \quad \mathbf{P}_0^* \subseteq \mathbf{P}_0; \quad \bigcup_{j=1}^m \mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_0^{**}, \quad \mathbf{P}_0^{**} \subseteq \mathbf{P}_0; \quad (11)$$

$$\text{int } \mathbf{P}_{i'l} \cap \text{int } \mathbf{P}_{jl} = \emptyset, \quad i, j \in J_k, i \neq j, l \in J_m; \quad \text{cl } \mathbf{P}_{i'l} \cap \text{cl } \mathbf{P}_{i+1,l} \neq \emptyset, \quad i \in J_{k-1}, l \in J_m;$$

$$\text{cl } \mathbf{P}_{i'l} \cap \text{cl } \mathbf{P}_{i,l+1} \neq \emptyset, \quad l \in J_{k-1},$$

где  $\text{int}()$  и  $\text{cl}()$  – топологические внутренность и замыкание множества [9].

Как известно [5], интервальное расстояние между интервальными множествами  $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  и  $\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  определяется таким образом

$$\rho(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \min_{\forall U_i \in \mathbf{M}_1, \forall U_j \in \mathbf{M}_2} \rho(U_i, U_j).$$

Известно [7], что интервальное расстояние между интервально параллельными интервальными плоскостями  $\Pi_1 \in \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  и  $\Pi_2 \in \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  вычисляется по формуле:

$$\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \left\langle |d_1 - d_2|, |v_{d_1} - v_{d_2}| \right\rangle,$$

где  $\langle d_i, v_{d_i} \rangle$ ,  $i = 1, 2$  – свободные члены нормальных интервальных уравнений интервальных плоскостей  $\Pi_i \in \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Определение 4.** Интервальной высотой  $\langle H \rangle$  интервального параллелепипеда  $\mathbf{P} \subset \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  назовем интервальное расстояние между интервальными гиперплоскостями, участвующими в формировании интервальной границы  $\text{fr } \mathbf{P}$  и интервально параллельными интервальной координатной плоскости  $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$ .

Очевидно,  $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \rho(\Pi_{1i}, \Pi_{2j})$ , где  $\Pi_{1i}$ ,  $\Pi_{2j}$ ,  $i, j \in J_6$  – интервальные плоскости, участвующие в формировании интервальных границ  $\text{fr } \mathbf{P}_1$  и  $\text{fr } \mathbf{P}_2$  соответственно.

Тогда, исходя из определений 1 и 4, а также учитывая вид интервальных уравнений (7) интервальных гиперплоскостей, участвующих в формировании интервальной границы  $\mathbf{fr} \mathbf{P}_i$ , получим интервальную высоту  $\langle H_i \rangle = \langle c_i, 2v_{c_i} \rangle$  интервального параллелепипеда  $\mathbf{P}_i$ ,  $i \in J_n^0$ .

**Определение 5.** Точки  $U_1, U_2 \in \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  интервально касаются и в пространстве определена интервальная метрика вида (3), то согласно [7], выполняются соотношения:

$$\begin{cases} |x_1 - x_2| = |v_{x_1} + v_{x_2}|; \\ |y_1 - y_2| = |v_{y_1} + v_{y_2}|; \\ |z_1 - z_2| = |v_{z_1} + v_{z_2}|. \end{cases}$$

Таким образом, интервальное расстояние между интервально касающимися точками определяется соотношением:

$$\rho(U_1, U_2) =$$

$$= \sqrt{\left\langle |v_{x_1} + v_{x_2}|, |v_{x_1} - v_{x_2}| \right\rangle^2 + \left\langle |v_{y_1} + v_{y_2}|, |v_{y_1} - v_{y_2}| \right\rangle^2 + \left\langle |v_{z_1} + v_{z_2}|, |v_{z_1} - v_{z_2}| \right\rangle^2} \quad (12)$$

Пусть в интервальную область  $\mathbf{P}_{ij}$ ,  $i \in J_k, j \in J_m$  помещены интервальные параллелепипеды  $\mathbf{P}_{ij}^1, \mathbf{P}_{ij}^2, \dots, \mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}, \dots, \mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$ . Найдем интервальное расстояние между ними.

**Определение 6.** Будем говорить, что два интервальных параллелепипеда  $\mathbf{P}_{ij}^t \subset \mathbf{P}_{ij}$  и  $\mathbf{P}_{ij}^{t+1} \subset \mathbf{P}_{ij}$ ,  $i \in J_n$ ,  $i \neq j$ , расположенных на месте  $t$  и  $t+1$ ,  $t=1, 2, \dots, r_{ij}-1$  соответственно в  $\mathbf{P}_{ij}$ , интервально касаются, если интервальное расстояние между ними находится по формуле:

$$\rho(\mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}) = \left\langle \left| v_{c_{ij}^{t+1}} + v_{c_{ij}^t} \right|, \left| v_{c_{ij}^{t+1}} - v_{c_{ij}^t} \right| \right\rangle,$$

где  $v_{c_{ij}^{t+1}}, v_{c_{ij}^t}$ ,  $i \in J_k, j \in J_m$ ,  $t \in J_{r_{ij}}$  – погрешности задания высот  $\mathbf{P}_{ij}^t, \mathbf{P}_{ij}^{t+1}$ .

**Определение 7.** Интервальной высотой  $\langle H_{ij} \rangle \in \mathbf{I}_S \mathbf{R}$ ,  $i \in J_k, j \in J_m$  занятой части интервальной области  $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{I}_S^3 \mathbf{R}$  назовем максимальное интервальное расстояние между интервальной координатной плоскостью  $\langle X \rangle \langle O \rangle \langle Y \rangle$  и интервальными гиперплоскостями, участвующими в формировании интервальной границы  $\mathbf{fr} \mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$ , где  $\mathbf{P}_{ij}^{r_{ij}}$  – интервальный параллелепипед, помещенный в  $\mathbf{P}_{ij}$  последним.



Очевидно, величина  $\langle H_{ij} \rangle$  равна сумме интервальных высот интервальных параллелепипедов, помещенных в  $\mathbf{P}_{ij}$  с учетом интервального расстояния между ними при условии, что данные интервальные параллелепипеды интервально касаются [6]:

$$\langle H_{ij} \rangle = \sum_{t=1}^{r_{ij}} (\langle H_{ij}^t \rangle + \rho(\mathbf{P}_{ij}^{t-1}, \mathbf{P}_{ij}^t)); \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m r_{ij} = n, \quad (13)$$

где  $\langle H_{ij} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ ,  $t \in J_{r_{ij}}$ ,  $i \in J_k$ ,  $j \in J_m$  – интервальная высота интервального параллелепипеда  $\mathbf{P}_{ij}^t$ , помещенного в подобласть  $\mathbf{P}_{ij} \subset \mathbf{P}_0$  на  $t$ -е место.

Тогда интервальной высотой  $\langle H \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  занятой части интервальной области размещения  $\mathbf{P}_0$  является интервальная величина

$$\langle H \rangle = \max_{1 \leq i \leq k} (\max_{1 \leq j \leq m} \langle H_{ij} \rangle), \quad (14)$$

т.е. под интервальной высотой  $\langle H \rangle$  занятой части интервальной области  $\mathbf{P}_0$  будем понимать максимальный элемент  $\langle H^* \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  точечного множества

$$\{\langle H_{11} \rangle, \langle H_{12} \rangle, \dots, \langle H_{1m} \rangle, \langle H_{21} \rangle, \dots, \langle H_{2m} \rangle, \dots, \langle H_{k1} \rangle, \dots, \langle H_{km} \rangle\} \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R},$$

где  $\langle H_{ij} \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ ,  $i \in J_k$ ,  $j \in J_m$ .

Иначе

$$\langle H^* \rangle = \max \{\langle H_{11} \rangle, \langle H_{12} \rangle, \dots, \langle H_{1m} \rangle, \langle H_{21} \rangle, \dots, \langle H_{2m} \rangle, \dots, \langle H_{k1} \rangle, \dots, \langle H_{km} \rangle\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Рассмотрим интервальное мультимножество  $\mathbf{G} = \{\langle C_1 \rangle, \langle C_2 \rangle, \dots, \langle C_n \rangle\} \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ . Предположим, что  $g$  из  $n$  элементов данного множества различны согласно определению равенства двух элементов пространства  $\mathbf{I}_s \mathbf{R}$  [4, 5].

Каждому размещению интервальных параллелепипедов поставим в соответствие интервальную матрицу [11] вида:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{A}_{k2} & \cdots & \mathbf{A}_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \end{pmatrix},$$

где под элементом  $\mathbf{A}_{ij} \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ ,  $i \in J_k$ ,  $j \in J_m$  интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  будем понимать интервальное множество вида

$$\mathbf{A}_{ij} = \{\langle H_{ij}^1 \rangle, \langle H_{ij}^2 \rangle, \dots, \langle H_{ij}^t \rangle, \dots, \langle H_{ij}^{r_{ij}} \rangle\} \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}.$$

Интервальной матрице  $\mathbf{A}$  сопоставим интервальную перестановку [9]:

$$\boldsymbol{\pi} = (\langle \pi_1 \rangle, \langle \pi_2 \rangle, \dots, \langle \pi_n \rangle); \quad (15)$$

$$\pi = (\langle H_{11}^1 \rangle, \langle H_{11}^2 \rangle, \dots, \langle H_{11}^{r_1} \rangle, \langle H_{12}^1 \rangle, \langle H_{12}^2 \rangle, \dots, \langle H_{12}^{r_2} \rangle, \dots, \langle H_{km}^1 \rangle, \dots, \langle H_{km}^{r_{km}} \rangle);$$

$$\langle H_{ij}^t \rangle \in \mathbf{G}, \quad i \in J_k, j \in J_m, t \in \{1, 2, \dots, r_{km}\}.$$

Комбинаторные  $\mathbf{e}$ -множества [1], порождаемые множеством интервалов  $\mathbf{G}$ , называются [9] интервальными  $\mathbf{e}$ -множествами или  $\mathbf{ie}$ -множествами.

Осуществим погружение  $\mathbf{ie}$ -множества всех интервальных перестановок вида (15)  $\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  в  $n$ -мерное интервальное пространство  $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ .

Всякому элементу  $\pi \in \mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G})$  поставим в соответствие элемент

$U = \mathbf{X} = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) = (\langle X_{11}^1 \rangle, \dots, \langle X_{11}^{r_1} \rangle, \dots, \langle X_{km}^1 \rangle, \dots, \langle X_{km}^{r_{km}} \rangle) \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$   
по следующему закону:

$$\theta: \pi \rightarrow \mathbf{X}; \quad (16)$$

$$\langle \pi_j \rangle = \langle X_j \rangle; \quad \forall \pi = (\langle \pi_1 \rangle, \langle \pi_2 \rangle, \dots, \langle \pi_n \rangle);$$

$$\langle X_j \rangle = \langle G_{\alpha_i} \rangle, \quad j \in J_n; \quad \langle G_{\alpha_i} \rangle \in \mathbf{G}, \quad \alpha_i \in J_n, \quad i \in J_n.$$

Обозначим через  $\mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G}) = \theta(\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G})) \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$  образ интервального  $\mathbf{e}$ -множества  $\mathbf{IM} = \mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  при отображении (16).

Тогда математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения интервальных параллелепипедов в интервальной области может быть представлена в виде:

найти

$$\langle H^* \rangle = \langle h^*, v_h^* \rangle = \min_{U \in \mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G})} \langle H \rangle; \quad \langle H \rangle = \max_{1 \leq i \leq m} (\max_{1 \leq j \leq k} \langle H_{ij} \rangle); \quad (17)$$

$$\langle H_{ij} \rangle = \sum_{t=1}^{r_{ij}} \langle X_{ij}^t \rangle + \sum_{t=1}^{r_{ij}-1} \left\langle \left| v_{X_{ij}^t} + v_{X_{ij}^{t+1}} \right|, \left| v_{X_{ij}^t} - v_{X_{ij}^{t+1}} \right| \right\rangle, \quad i \in J_k, j \in J_m.$$

Задача (17) является основной интервальной задачей оптимизации на  $\mathbf{ie}$ -множестве [10] или основной  $\mathbf{ie}$ -задачей, которая может быть представлена в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \min; \quad \mathbf{X} \in \mathbf{ID} \subseteq \mathbf{IE} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R},$$

где  $\mathbf{IE} = \theta(\mathbf{IM}); \quad (\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, \dots, \langle M_n \rangle) \in \mathbf{IM};$

$$\theta(\pi) = \mathbf{X} = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) \in \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}; \quad \langle X_i \rangle = \langle M_i \rangle, \quad i \in J_n.$$

**Выводы по данному исследованию.** Построенная интервальная математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения параллелепипедов в параллелепипеде с учетом погрешностей исходных данных позволяет, с одной стороны, рационально учесть погрешности ис-

ходных данных уже на этапе моделирования задачи, с другой, в дальнейшем, при ее реализации использовать известные методы комбинаторной оптимизации. Модель может быть использована при моделировании 3D задач размещения геометрических объектов с кусочно-линейной границей, при моделировании задач компоновки радиоэлектронной аппаратуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования*. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.
2. Стоян Ю.Г., Галата А.Я. *О плотной упаковке параллелепипедов произвольных размеров в параллелепипеде наименьшего объема // Кибернетика*. – 1972. – № 2. – С.81-86.
3. Новожилова М.В., Черноморец А.А. *Об одном способе поиска оптимального размещения гиперпараллелепипедов // Препр. НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения*. – 1992. – № 365 – С. 27.
4. Стоян Ю. Г. *Метрическое пространство централизованных интервалов // Доклады НАН Украины, А*. – 1996. – № 7. – С. 23-25.
5. Stoyan Yu. G. *The extended interval space and elementary mappings // Proc. of the IMACS – GAMM Intern. Symp. On Numerical Methods and Error Bounds*. – Oldenburg (Germany). – 1995. – P. 270-279.
6. Романова Т.Е. *Интервальное пространство  $I_s^n \mathbf{R}$  // Доклады НАН Украины*. – 2000. – № 9. – С. 36-41.
7. Стоян Ю.Г. *Квазилинейные интервальные отображения. Интервальная метрика. Препр. НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения*. – X., 1995. – № 387. – 23 с.
8. Гребенник И.В., Романова Т.Е. *Интервальная гиперплоскость в пространстве  $I_s^n \mathbf{R}$  // Проблемы машиностроения*. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 52-56.
9. Гребенник И.В., Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. *Основная оптимизационная задача геометрического проектирования в интервальном виде // Радиоэлектроника. Информатика. Управление*. – 2004. – № 2. – С. 68-72.
10. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. *Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных // Докл. НАН Украины. Сер. А*. – 1998. – № 9 – С. 114-120.
11. Евсеева Л.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю.А. *Особенности комбинаторной оптимизационной задачи размещения интервальных прямоугольников // Радиоэлектроника и информатика*. – 1999. – № 3. – С. 48-50.

Поступила 6.01.2006

**Рецензент:** доктор технических наук, старший научный сотрудник Н.И. Гиль,  
Институт проблем машиностроения НАН Украины.