

## СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНИХ ПАРАМЕТРІВ ДІАГРАМИ СПРЯМОВАНOSTІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ АНТЕННОЇ РЕШІТКИ ПРИ МАЛИХ ЗНАЧЕННЯХ ФАЗОВИХ ПОМИЛОК

В.І. Замятін, В.М. Чепіга, Г.А. Левагін, А.Ф. Шевченко  
(Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба)

*Розглянуто середню діаграму спрямованості по потужності та дисперсію уведення напрямку головного максимуму циліндричної антенної решітки при наявності фазових помилок в її елементах. Показано, що основні результати якісно збігаються зі статистичними характеристиками, отриманими для лінійної та кільцевої антенних решіток – зменшується величина діаграми спрямованості по потужності в напрямку головного максимуму, відбувається запливання нулів діаграми спрямованості, так само якісно веде себе дисперсія уведення напрямку головного максимуму в залежності від радіусу кореляції помилок.*

*циліндрична антенна решітка, статистичні характеристики, діаграма спрямованості по потужності, дисперсія уведення напрямку головного максимуму*

**Постановка проблеми.** В останній час в зв'язку з розвитком техніки збільшився інтерес до розробки вісесиметричних двохкоординатних по кутам антенних решіток [1]. До їх класу належить й циліндрична антенна решітка. Одним з важливих питань при розгляді циліндричної антенної решітки є характеристики точності визначення кутових координат при наявності різного роду помилок в елементах антени. Як відомо зі статистичної теорії антен (СТА), характеристики спрямованості будь-яких антен обмежені всілякого роду неточностями і нестабільностями в амплітудно-фазовому розподілі (АФР). Точнісні характеристики антен також визначаються фазовими помилками. Особливо важливе питання точного визначення координат і, відповідно, впливу фазових помилок на характеристики антен у фазованих антенних решітках (ФАР), насамперед, в активних. Величини фазових помилок фактично визначають дискретність фазообертачів або елементів приймально-передавальних модулів.

Проведемо розгляд впливу фазових помилок в елементах на статистичні характеристики циліндричної антенної решітки (АРЦ).

**Аналіз літератури.** Найбільш глибокою та об'ємною в області СТА є праця [2]. В ній проведено дослідження статистичних характеристик лінійної синфазної системи безперервно розподілених джерел з розповсюджен-



де  $X, Y, Z$  – характерні розміри об'єму  $V$  в напрямку відповідних вісей прямокутної системи координат  $Oxyz$ , що пов'язана з об'ємом;

$$\tilde{\mathbf{k}}_0 = \left\{ \frac{\pi X}{\lambda} \sin \tilde{\theta}_0 \cos \tilde{\varphi}_0, \frac{\pi Y}{\lambda} \sin \tilde{\theta}_0 \sin \tilde{\varphi}_0, \frac{\pi Z}{\lambda} \cos \tilde{\varphi}_0 \right\} = \{ \tilde{k}_{0x}, \tilde{k}_{0y}, \tilde{k}_{0z} \} -$$

узагальнений кут.

Відповідно, діаграма спрямованості по потужності (ДСП) має вигляд

$$\left| \dot{f}(\tilde{\mathbf{k}}_0) \right|^2 = \sum_s \sum_q \sum_w \sum_y A(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) A^*(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \exp\left( i \sigma_\phi \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right) + i \tilde{\mathbf{k}}_0 \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_{s,q} - \tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right). \quad (2)$$

Розглянемо статистичні характеристики при впливі випадкової фазової помилки в кожному приймальному елементі. Як зазначалося вище, будемо вважати, що в процесі виготовлення та експлуатації АРЦ вдалося запобігти великим фазовим помилкам, тобто – всі помилки, що розглянуті, є *малими*. Тому, всі дисперсії помилок відповідають співвідношенню  $\sigma_\phi^2 \ll 1$ , і можна записати

$$\exp\left( i \cdot \sigma_\phi \cdot \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right) \right) \approx 1 + i \cdot \sigma_\phi \cdot \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right) - \frac{1}{2} \cdot \sigma_\phi^2 \cdot \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right)^2. \quad (3)$$

Формули (1) – (3) будемо розглядати в подальшому в якості вихідних.

**Середня діаграма спрямованості по потужності при впливі випадкової фазової помилки в кожному приймальному елементі циліндричної антенної решітки.** Для знаходження середньої діаграми спрямованості по потужності розглянемо вираз для ДСП (2). Середня ДСП має вигляд

$$\overline{\left| \dot{f}(\tilde{\mathbf{k}}_0) \right|^2} = \sum_s \sum_q \sum_w \sum_y A(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) \cdot A^*(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \exp\left( i \cdot \sigma_\phi \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right) \right) \exp\left( i \cdot \tilde{\mathbf{k}}_0 \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_{s,q} - \tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right). \quad (4)$$

Будемо вважати, що середнє значення помилок  $\overline{\phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q})} = 0$ , тому що воно може бути включено в  $A(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q})$ , коефіцієнт кореляції  $\overline{\phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) \cdot \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y})} = K_{s,q;w,y}$ , при цьому коефіцієнт кореляції є нормованим,  $K_{s,q;w,y} = 1$  при  $s = w, q = y$ . Фазовий множник різниці фаз помилок (3) з урахуванням їх малості при усередненні прийме вигляд

$$\begin{aligned} \exp\left( i \cdot \sigma_\phi \cdot \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right) \right) &\approx 1 + i \cdot \sigma_\phi \cdot \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right) - \\ &- 1/2 \cdot \sigma_\phi^2 \cdot \left( \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{s,q}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}}_{w,y}) \right)^2 = (1 - \sigma_\phi^2) + \sigma_\phi^2 \cdot K_{s,q;w,y}. \end{aligned} \quad (5)$$

СДСП (4) прийме вигляд

$$\overline{\left| \dot{f}(\tilde{\mathbf{k}}_0) \right|^2} = \left| \dot{f}_0(\tilde{\mathbf{k}}_0) \right|^2 (1 - \sigma_\phi^2) + \sigma_\phi^2 \cdot I(\tilde{\mathbf{k}}_0). \quad (6)$$

де діаграма спрямованості по потужності (без фазових помилок)

$$\left| \dot{f}_0(\tilde{k}_0) \right|^2 = \sum_s \sum_q \sum_w \sum_y A(\tilde{r}_{s,q}) A^*(\tilde{r}_{w,y}) \exp\left( i \cdot \tilde{k}_0 \cdot (\tilde{r}_{s,q} - \tilde{r}_{w,y}) \right),$$

та діаграма розсіяння (ДР)

$$I(\tilde{k}_0) = \sum_s \sum_q \sum_w \sum_y K_{s,q;w,y} A(\tilde{r}_{s,q}) A^*(\tilde{r}_{w,y}) \exp\left( i \cdot \tilde{k}_0 \cdot (\tilde{r}_{s,q} - \tilde{r}_{w,y}) \right).$$

З формули (6) видно, що СДСП складається з двох частин: перша – ДС когерентної частини випромінювання  $\left| \dot{f}_0(\tilde{k}_0) \right|^2 (1 - \sigma_\phi^2)$ , друга  $\sigma_\phi^2 \cdot I(\tilde{k}_0)$  – діаграми розсіювання (ДС частково когерентної частини).

ДС когерентної частини випромінювання являє собою неперекручену ДС по потужності, що зменшена в  $(1 - \sigma_\phi^2)$ . Вигляд функції  $I(\tilde{k}_0)$  залежить від коефіцієнта кореляції  $K_{s,q;w,y}$ .

Перейдемо до конкретизації розглянутих співвідношень для СДСП АРЦ аналогічно (4) має вигляд

$$\begin{aligned} \overline{\left| \dot{f}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0) \right|^2} &= \sum_{s=-S_1}^{S_1} \sum_{q=-Q_1}^{Q_1} \sum_{w=-W_1}^{W_1} \sum_{y=-Y_1}^{Y_1} |\cos(\varphi_0 - s \cdot \delta\alpha)| \cdot |\cos(\varphi_0 - w \cdot \delta\alpha)| \cdot |\sin(\theta_0)|^2 \times \\ &\times |\cos(\tilde{\varphi}_0 - s \cdot \delta\alpha)| \cdot |\cos(\tilde{\varphi}_0 - w \cdot \delta\alpha)| \cdot |\sin(\tilde{\theta}_0)|^2 \exp\left( i \cdot \overline{\sigma_\phi} \cdot (\phi(\tilde{r}_{s,q}) - \phi(\tilde{r}_{w,y})) \right) \times \quad (7) \\ &\times \exp \left[ i \cdot \frac{\omega_0}{c} \cdot \left[ \begin{aligned} & \left( \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \tilde{\theta}_0 \cos \tilde{\varphi}_0 \right) \left( r_q \sin \beta_q \cos \alpha_s - r_y \sin \beta_y \cos \alpha_w \right) + \\ & \left( \sin \theta_0 \sin \varphi_0 - \sin \tilde{\theta}_0 \sin \tilde{\varphi}_0 \right) \left( r_q \sin \beta_q \sin \alpha_s - r_y \sin \beta_y \sin \alpha_w \right) \\ & + \left( \cos \theta_0 - \cos \tilde{\theta}_0 \right) \left( r_q \cdot \cos \beta_q - r_y \cdot \cos \beta_y \right) \end{aligned} \right] \right]. \end{aligned}$$

За умови малості радіусів кореляції введемо наступні **допущення і обмеження**:

1) форма коефіцієнта кореляції не грає важливої ролі при умові його монотонного зменшення з відстанню [2];

2) коефіцієнт кореляції розглядається роздільно в площинах двох кутів  $\theta$  та  $\varphi$  (тобто розглядається зв'язок окремо між елементами решітки по лінійці та по кільцю), зв'язок між елементами решітки по діагоналі не розглядається.

Розглянемо випадок, коли помилки *некорельовані*. Тоді

$$K_{s,q;w,y} = \begin{cases} 1 & s = w, q = \gamma, \\ 0 & s \neq w, q \neq \gamma. \end{cases} \quad (8)$$

СДСП згідно формули (6) з урахуванням (5)

$$\overline{|\dot{f}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0)|^2} = (1 - \sigma_\phi^2) \cdot |\dot{f}_0(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0)|^2 + \sigma_\phi^2 \cdot I_1(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0), \quad (9)$$

де  $I_1(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0)$  – діаграма розсіяння АРЦ при некорельованих помилках.

Розглянемо випадок *корельованих* помилок. Для спрощення розглянемо трикутну форму коефіцієнта кореляції в одній з площин  $\theta$  або  $\varphi$  (рис. 2)

$$\begin{cases} K_{s,w} = 1 - \frac{e}{E}, & e = |s - w| < E, \\ 0, & e \geq E; \end{cases} \quad \begin{cases} K_{q,y} = 1 - \frac{a}{A}, & a = |q - y| < A, \\ 0, & a \geq A; \end{cases} \quad (10)$$

де  $e(a)$  – радіус кореляції помилок (з фізичних міркувань доцільно вимірювати дискретно – в відстанях між елементами);  $E(A)$  – максимальне значення радіусу кореляції помилок.

Для прикладу розглянемо однаковий коефіцієнт кореляції обох площин  $K_{s,w} = K_{q,y}$  (рис. 2).

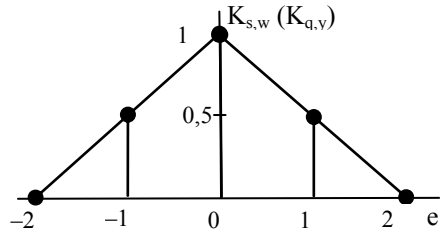


Рис. 2. Коефіцієнт кореляції трикутної форми

Для корельованих помилок СДСП має вигляд

$$\overline{|\dot{f}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0)|^2} = (1 - \sigma_\phi^2) \cdot |\dot{f}_0(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0)|^2 + \sigma_\phi^2 \cdot I(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0), \quad (11)$$

де  $I(\tilde{\theta}_0, \tilde{\varphi}_0)$  – діаграма розсіяння АРЦ при корельованих помилках.

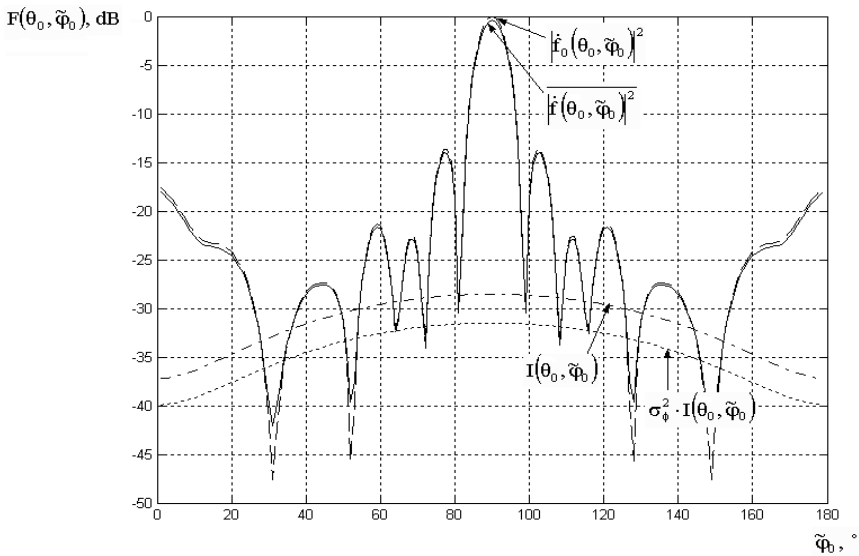
Були проведені розрахунки для циліндричної антенної решітки радіусом  $r$  і висотою 1 м, з робочим сектором розміром 31 на 51 елемент, кількість елементів в кільці –  $S_0 = 141$ , кількість кілець –  $Q_0 = 51$ , коефіцієнт кореляції в обох площинах трикутної форми (рис. 2),  $E = A = 2$ .

Вид СДСП та ДР відображено на рис. 3, а, б. Величина  $\sigma = 0,3$ , що відповідає величині фазової помилки приблизно в  $17^\circ$ .

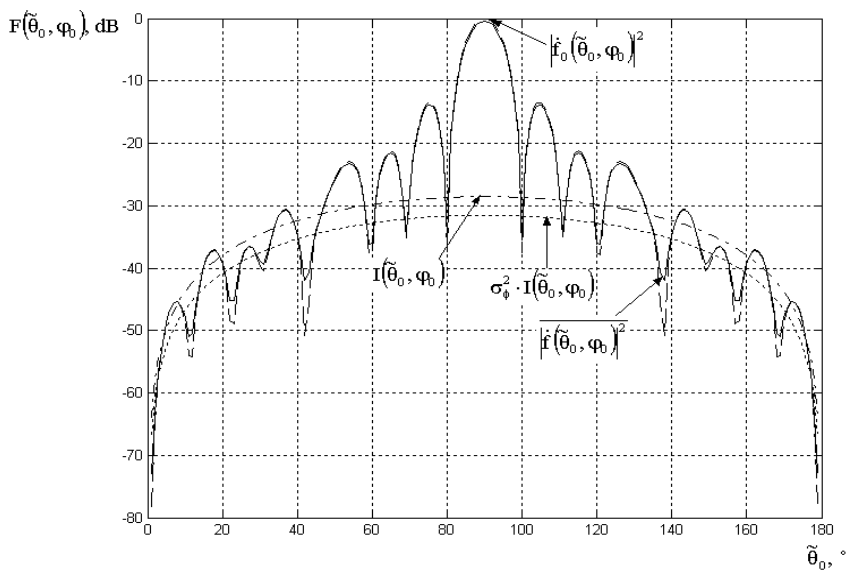
**Дисперсія відведення напрямку головного максимуму циліндричної антенної решітки.** Для розгляду відведення НГМ скористуємося методикою, що викладена в праці [5]. Для розгляду відходу НГМ в загальному вигляді необхідно розглянути ДСП при наявності фазових помилок згідно формули (2). Відхід НГМ від  $\vec{k}_0$  станове  $\vec{k}_{r0} = \vec{k}_0 + \Delta\vec{k}_0$ . При цьому, градієнт від ДСП по  $\vec{k}_0$  з помилкою буде спрямований по  $\vec{k}_{r0}$ :

$$\vec{\nabla} \left( |\dot{f}_0(\vec{k}_0)|^2 \right) = 0. \quad (12)$$

Підставимо (2) в (12) та враховуючи формулу (3), отримаємо:



a



б

Рис. 3. Середні діаграми спрямованості по потужності циліндричної антенної решітки та діаграми розсіювання:  
а – площина  $\varphi$ ; б – площина  $\theta$

$\bar{V} \exp(i\bar{k}(\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y})) = i(\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y}) \exp(i\bar{k}(\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y})); \bar{k}_{r0} = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 \sigma_\phi + \bar{k}_2 \sigma_\phi^2 + O(\sigma^3)$ ,  
 виділимо члени, що пропорційні  $\sigma_\phi, \sigma_\phi^2, \dots$  та прирівняємо нулю коефіцієнти при різних ступенях  $\sigma_\phi$ . В результаті отримаємо систему рівнянь виду

$$\begin{cases} \sum_s \sum_q \sum_w \sum_y A(\bar{r}_{s,q}) A^*(\bar{r}_{w,y}) (\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y}) \exp(i\bar{k}_0(\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y})) = 0; \\ \sum_s \sum_q \sum_w \sum_y A(\bar{r}_{s,q}) A^*(\bar{r}_{w,y}) (\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y}) \exp(i\bar{k}_0(\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y})) \times \\ (\phi(\bar{r}_{s,q}) - \phi(\bar{r}_{w,y}) + \bar{k}_1(\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y})) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Перше рівняння системи (13) визначає  $\bar{k}_0$  – НГМ при відсутності помилок; друге рівняння – дозволяє знайти  $\Delta\bar{k}_0 = \bar{k}_1$ . Відповідно, підвищуючи вимоги до точності визначення положення цілі з системи (13) можуть бути знайдені всі коефіцієнти розкладення.

Значення НГМ при відсутності помилок є відомим. Тому, доцільно проводити відлік кутових помилок від НГМ ( $\bar{k}_0 = 0$ ) та вважати множник  $\exp(i\bar{k}_0 \cdot (\bar{r}_{s,q} - \bar{r}_{w,y})) = \exp(0) = 1$  в АФР  $A(\bar{r}_{s,q}) A^*(\bar{r}_{w,y})$ . Вектор кутової помилки з другого рівняння системи (13) буде мати вигляд, що є аналогічний виразу для знаходження центру мас.

В праці [5] показано, що для його спрощення доцільно від четвертих інтегралів (в нашому дискретному випадку – сум) перейти до подвійних. Для цього необхідно провести нормування координат таким чином, щоб центр координат співпадав з центром ваги при відсутності помилок. Аналогічний підхід, але для дискретного випадку АФР, може бути розглянутий і в нашому випадку.

Після перенесення початку с.к. в центр важкості дисперсія НГМ

$$\sigma_{\Delta k}^2 = \sum_S \sum_Q \sum_W \sum_Y K_{s,q,w,y} \cdot A'(\bar{r}'_{s,q}) \cdot A'(\bar{r}'_{w,y}) \cdot \bar{r}'_{s,q} \cdot \bar{r}'_{w,y} / \left( \sum_S \sum_Q A'(\bar{r}'_{s,q}) \cdot \bar{r}'_{s,q} \right)^2, \quad (14)$$

де  $A'(\bar{r}'_{s,q})$ ,  $\bar{r}'_{s,q}$  – значення АР та відстані до  $s, q$ -го елемента від центру системи координат, що розташований у центрі важкості;  $K_{s,q,w,y} = \Delta\phi_{s,q} \cdot \Delta\phi_{w,y}$  – коефіцієнт кореляції.

Як вже було сказано вище, коефіцієнт кореляції розглядається незалежно в двох площинах – по кільцю АРЦ та по лінійці.

В загальному вигляді дисперсію УНГМ необхідно розглядати в кар-

тинній площині  $uoz$  (НГМ  $\bar{k}_0 = 0$  співпадає з віссю  $ox$ ). Переходячи до АРЦ, після нормування по  $\sigma_\phi^2$  отримаємо проекції  $\sigma_{\Delta k}^2$  на вісі  $y$  та  $z$ .

Або, скорочуючи та проводячи нормування по  $\sigma^2$  отримуємо

$$\sigma_{yH}^2(E) = \frac{\sum_{v=0}^E \sum_{s=-S_1}^{S_1-v} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{v}{E}\right) \cdot \sin(2 \cdot s \cdot \delta\alpha) \cdot \sin(2 \cdot (s+v) \cdot \delta\alpha)}{\left[ \sum_{s=-S_1}^{S_1} \sin^2(s \cdot \delta\alpha) \cdot |\cos(s \cdot \delta\alpha)| \right]^2}; \quad (15)$$

$$\sigma_{zH}^2(A) = \left( \sum_{v=0}^A \sum_{q=-Q_1}^{Q_1-v} \left(1 - \frac{v}{A}\right) q(q+v) \delta h^2 \right) / \left[ \sum_{q=-Q_1}^{Q_1} q^2 \delta h^2 \right]^2. \quad (16)$$

Вираз для дисперсії УНГМ в площині  $u0z$ , проекція на вісь  $y$ , зображений на рис. 4. З нього видно, що максимальне значення дисперсії УНГМ при радіусі кореляції помилок АРЦ  $\rho = 18$  ( $\rho_{\max} = 0,59 L$ ), що є більшим, ніж у лінійної ( $\rho_{\max} = 0,4 L$ ).

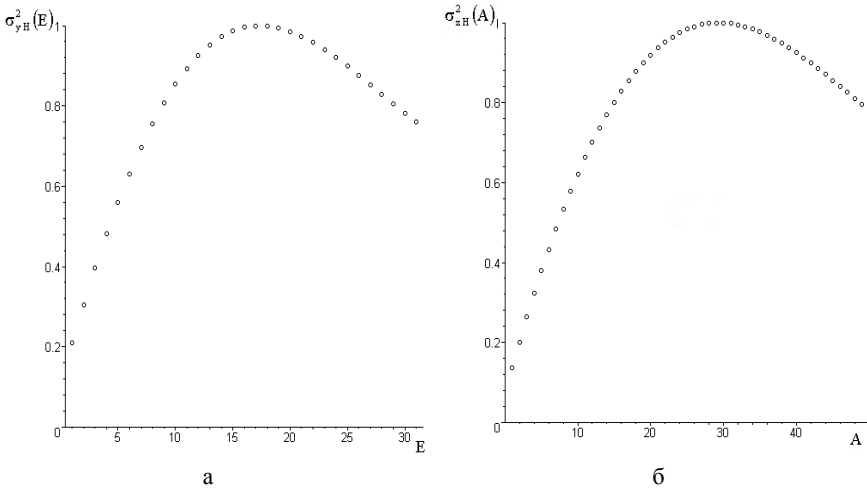


Рис. 4. Залежність дисперсії уведення напрямку головного максимуму від радіусу кореляції помилок: а – вісь  $y$ ; б – вісь  $z$

**Висновки.** 1. Розглянуто СДСП при малих радіусах кореляції. Показано, що вид СДСП в обох площинах  $\theta$  та  $\phi$  при некорельованих помилках не відрізняється від ДСП, за виключенням того, що відбувається



зменшення рівня ДС в НГМ, деяке запливання нулів ДС та збільшення рівня бічних пелюсток. Аналогічна ситуація спостерігається і при корельованих помилках при невеликих радіусах кореляції. Водночас, навіть при значних фазових помилках (наприклад, при  $\sigma = 0,3$ , що відповідає  $\Delta\psi \approx 17^\circ$ ) вищезазначені ефекти є незначними (величина НГМ зменшується на 0,5 дБ). Таким чином, фазові помилки з малим радіусом кореляції незначно впливають на СДСП;

2. Розглянуто дисперсію УНГМ АРЦ для малих фазових помилок. Залежність дисперсії УНГМ АРЦ від радіусу кореляції має екстремальний характер – при збільшенні радіусу кореляції помилок їх дисперсія збільшується, стає максимальною при певному рівні, а потім зменшується. Для АРЦ максимуму дисперсія набуває при значеннях  $\rho_{\max} \approx 0,59 L$  в обох площинах, що є дещо більшим, ніж в лінійній решітці  $\rho_{\max} \approx 0,4 L$ . Таким чином, найбільш небезпечними помилками в АРЦ є помилки з радіусом кореляції, що приблизно дорівнює половині винесеного розкриву решітки.

3. Всі статистичні характеристики, що отримані для АРЦ (СДСП та дисперсія УНГМ), якісно збігаються з результатами для лінійної антенної решітки, що наведені в [2]. Статистичні характеристики АРЦ займають проміжне положення між лінійною антенною решіткою та кільцевою.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Антенные решетки.* – [Электр. ресурс]. – Режим доступа: [www.lantan-prf.ru](http://www.lantan-prf.ru).
2. Шифрин Я.С. *Вопросы статистической теории антенн.* – М.: Сов. радио, 1970. – 384 с.
3. *Справочник по антенной технике. В 5 т. Т. 1.* / Под ред. Я.Н. Фельда, Е.Г. Зелкина. – М.: ИПРЖР, 1997. – 256 с.
4. Levagin G.A., Bondarenko I.M., Chepiga V.N. *The statistical tests method application for calculating of the axisymmetric antennas characteristics* // *IV International Conference on Antenna Theory and Techniques, 9-12 September 2003, Sevastopol, Ukraine.* – Севастополь. – 2003. – С. 168-170.
5. Замятин В.И. *К вопросу о статистических характеристиках поля апертурных антенн* // *Антенны.* – М.: Связь. – 1974. – Вып. 19. – С. 46-56.

Надійшла 6.03.2006

**Рецензент:** доктор технічних наук, професор Л.Ф. Купченко,  
Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба.