УДК 621.311

ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЯДА МОЩНОСТЕЙ АВТОНОМНЫХ ЭЛЕКТРОАГРЕГАТОВ

А.Б. Кульчицкий
(Электротехническая служба ВС Украины, Киев)

Рассматриваются особенности выбора оптимального ряда мощностей автономных электроагрегатов, связанные с учетом затрат на их эксплуатацию и наличием фиксированных типов электроагрегатов.

оптимальный ряд мощностей, автономный электроагрегат, эксплуатация

Введение. При выборе источников электроэнергии для системы электроснабжения предварительно необходимо решить задачу выбора оптимального ряда их мощностей.

Указанная задача может быть представлена как задача определения такого количества типов электроагрегатов и такой мощности электроагрегата каждого типа, при которых общая стоимость источников электроэнергии проектируемой системы электроснабжения будет минимальна. В такой постановке решение задачи существует, если известна функция распределения мощности автономных электроагрегатов для электроснабжения потребителей различного назначения.

При решении рассматриваемой задачи будем полагать, что известны затраты на эксплуатацию электроагрегатов и в наличии имеются агрегаты определенных типов.

Анализ литературы. Подобные задачи рассматривались в работах [1 – 4], в которых предлагались математические модели и обосновывались способы выбора перспективного ряда мощностей источников электрической энергии для образцов вооружения и военной техники.

В [2] показано, что рассматриваемая задача относится к классу задач оптимального управления и ее решение необходимо искать на двух уровнях. На первом уровне необходимо определиться с рядом мощностей источников, а на втором уровне решать собственно задачу распределения источников по потребителям.

В [3] выполнена формализация задачи определения ряда мощностей источников. Показано, что в общем виде выражение суммарных затрат S_M на производство, разработку и эксплуатацию электроагрегатов может быть представлено в виде:

$$S_M = \sum_{i=1}^{N} S_{\text{п}i} M_i + \sum_{i=1}^{N} S_{\text{р}i} + \sum_{i=1}^{N} S_{\text{э}i} X_i M_i T_i \,, \qquad (1)$$

где $M = \sum_{i=1}^{N} M_i$ – общее число агрегатов; M_i – число агрегатов i-го типа; N – число типов агрегатов; $S_{\text{п}i}$ – стоимость производства одного агрегата i-го типа; $S_{\text{р}i}$ – стоимость разработки одного агрегата i-го типа; $S_{\text{э}i}$ – удельные эксплуатационные расходы для агрегата i-го типа на 1 кВт мощности, отнесенные к единице времени; $X_i T_i$ – суммарная наработка агрегата i-го типа.

В [3] получены соотношения для простейшего случая, когда функции стоимости $S_{\text{п}}$, $S_{\text{р}}$ являются линейными, а затратами на эксплуатацию можно пренебречь.

Основной материал. Требуется найти расчетные соотношения при наличии фиксированных типов электроагрегатов, когда затраты на эксплуатацию $S_{\text{э}}$ не равны нулю, и в случае нелинейной интегральной функции распределения мощности $F(x)$.

Рассмотрим отдельные составляющие функции суммарных затрат (1).

Поскольку суммарные затраты S_M зависят от степени участия каждого из N типов в производстве электроэнергии, введем понятие функции распределения мощности. Функция распределения мощности может быть выражена в дифференциальной $\varphi(x)$ или в интегральной $F(x)$ формах. Выражение $\varphi(x)$ характеризует среднюю или нормированную потребность потребителей электроэнергии в мощности $x = X$. Выражение $F(x)$ характеризует суммарную потребность потребителей электроэнергии в диапазоне мощностей от $x = 0$ до $x = X$.

Исходя их определения, дифференциальная и интегральная функции распределения мощности обладают следующими свойствами:

$$0 \le \varphi(x) \le 1\,; \;\; 0 \le F(x) \le 1\,; \;\; \int_0^x \varphi(x)\,dx = F(x)\,; \;\; \frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x)\,; \qquad (2)$$

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = 1\,; \qquad F(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \ge X_N \,, \qquad (3)$$

где X_N – максимальная мощность, требуемая потребителями.

На рис. 1 приведены дифференциальная $\varphi(x)$ и интегральная $F(x)$ функции распределения мощности для простейшего случая, когда дифференциальная функция $\varphi(x)$ постоянна в некотором диапазоне аргумента X и равна нулю за его пределами.

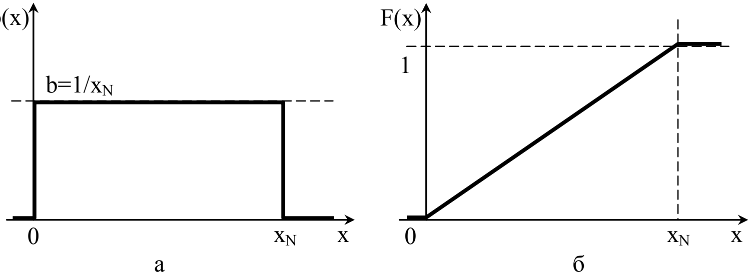

Рис. 1. Виды функции распределения мощности:
а – дифференциальная функция распределения мощности $\varphi(x)$;
б – интегральная функция распределения мощности $F(x)$

Здесь дифференциальная функция распределения мощности $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} b \quad \text{при} \quad 0 \le x \le x_N; \\ 0 \quad \text{при} \quad x \le 0 \text{ и } x \ge x_N, \end{cases} \tag{4}$$

где коэффициент $b = 1/x_N$ определяется из условия (3) нормирования функции $\varphi(x)$.

В этом случае интегральная функция распределения мощности $F(x)$ может быть представлена в виде:

$$F(x) = \begin{cases} b \cdot x \quad \text{при} \quad 0 \le x \le x_N; \\ 0 \quad \text{при} \quad x \le 0; \\ 1 \quad \text{при} \quad x \ge x_N. \end{cases} \tag{5}$$

На рис. 2 приведены дифференциальная $\varphi(x)$ и интегральная $F(x)$ функции распределения мощности для случая линейного дифференциального закона распределения мощности $\varphi(x)$ с максимумом при минимальном значении мощности и нулевым значением при максимальном значении мощности.

Здесь дифференциальная функция распределения мощности $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} b \cdot x + c \quad \text{при} \quad 0 \le x \le x_N; \\ 0 \quad \text{при} \quad x \le 0 \text{ и } x \ge x_N, \end{cases} \tag{6}$$

где коэффициенты $b = -\dfrac{2}{x_N^2}$ и $c = \dfrac{2}{x_N}$ определяются из условия (3) нормирования функции $\varphi(x)$.

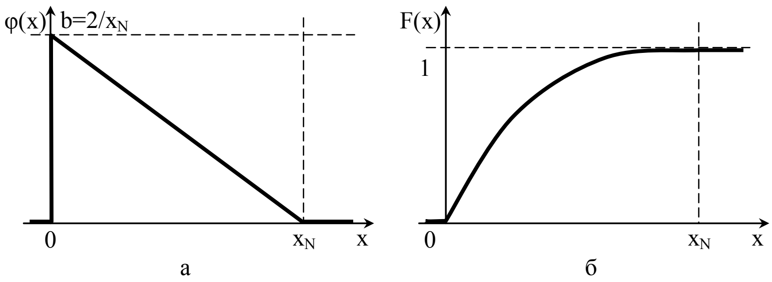

Рис. 2. Виды функции распределения мощности:
а – дифференциальная функция распределения мощности $\varphi(x)$;
б – интегральная функция распределения мощности $F(x)$

В этом случае интегральная функция распределения мощности $F(x)$ может быть представлена в виде:

$$F(x)=\begin{cases} b\cdot\dfrac{x^2}{2}+c\cdot x \quad \text{при} \quad 0\le x\le x_N; \\ 0 \quad \text{при} \quad x\le 0; \\ 1 \quad \text{при} \quad x\ge x_N. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что и выражение для дифференциальной функции распределения мощности $\varphi(x)$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)\,dx\ , \tag{8}$$

и выражение для интегральной функции распределения мощности

$$F(x_{k+1})-F(x_k) \tag{9}$$

определяют характер распределения величин потребляемых мощностей в диапазоне ее изменения $x_k \ldots x_{k+1}$ и могут использоваться как коэффициенты в функциях $S_п$ и $S_э$.

Легко видеть, что выражение (9) значительно удобнее для проведения анализа. Поэтому в последующем предлагается представлять функцию распределения мощности в ее интегральной форме и использовать выражение (9) в качестве коэффициента потребности в мощности.

С учетом вышеизложенного, найдем выражения для функций $S_п$, $S_р$ и $S_э$, которые входят в выражение (1).

Представим суммарную стоимость $S_п$ производства необходимого количества M электроагрегатов N типов, необходимых для электроснабжения потребителей в виде выражения:

$$S_{\text{п}i} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right] \cdot M_i \cdot C_{\text{п}i}(x_{k+1}), \qquad (10)$$

где $F(x_{k+1}) - F(x_k)$ – коэффициент потребности в мощности в диапазоне мощностей от x_k до x_{k+1}, где число диапазонов мощностей равно числу типов электроагрегатов N; M_i – количество электроагрегатов i-го типа; $C_{\text{п}i}(x_{k+1})$ – функция стоимости производства одного электроагрегата i-го типа в зависимости от его мощности x, $i = k+1$.

Отметим, что значения мощностей x_k неизвестны и служат предметом поиска.

Значения функции стоимости $C_{\text{п}i}(x_{k+1})$ могут быть найдены по результатам обработки статистических данных.

Поскольку стоимость разработки новых типов электроагрегатов не зависит от их количества в серии, суммарная стоимость S_p разработки электроагрегатов N типов не содержит коэффициента потребности в мощности и может быть представлена в виде выражения:

$$S_{pi} = \sum_{k=0}^{N-1} C_{pi}(x_{k+1}), \qquad (11)$$

где $C_{pi}(x_{k+1})$ – функция стоимости разработки, испытаний и постановки на производство i-го типа электроагрегата мощностью x_{k+1}.

В случае, если использование новых типов электроагрегатов не предусматривается, принимается $S_{pi} = 0$.

Рассмотрим суммарную стоимость $S_{\text{э}i}$ эксплуатации необходимого количества электроагрегатов i-го типа в течение периода времени T. Поскольку затраты на эксплуатацию электроагрегатов зависят от общего количества M_i электроагрегатов и, как правило, возрастают при увеличении продолжительности эксплуатации, рассматриваемая функция может быть представлена в виде:

$$S_{\text{э}i} = \int_0^T \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[F(x_{k+1}) - F(k)\right] \cdot M_i \cdot C_{\text{э}i}(x_{k+1}, t) \right\} dt, \qquad (12)$$

где $C_{\text{э}i}(x_{k+1}, t)$ – функция стоимости эксплуатации или хранения одного электроагрегата i-го типа в зависимости от его мощности x_k и времени эксплуатации (хранения).

В простейшем случае, если считать функцию стоимости не зависящей от времени, т.е. при $C_{xi}(x_{k+1}, t) = C_{xi}(x_{k+1})$, выражение (12) упростится:

$$S_{эi} = T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left[F(x_{k+1}) - F(k)\right] \cdot M_i \cdot C_{x\,i}(x_{k+1}). \qquad (13)$$

Таким образом, суммарные затраты S_M, связанные с созданием, производством (закупкой) и эксплуатацией в течение периода времени T электроагрегатов N типов для обеспечения потребителей электроэнергией в диапазоне мощностей от x_0 до x_N могут быть представлены следующей функцией:

$$\begin{aligned} S_M &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right] \cdot M_i \cdot C_{пi}(x_{k+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_{pi}(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^{N} X_i T_i \int_0^T \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[F(x_{k+1}) - F(k)\right] \cdot M_i \cdot C_{эi}(x_{k+1}, t) \right\} dt. \end{aligned} \qquad (14)$$

При дальнейших расчетах будем полагать, что агрегат мощностью x_{k+1} используется для обеспечения потребителей в диапазоне мощностей $[x_k, \ldots, x_{k+1}]$.

Найдем расчетные соотношения для случая, когда затраты на эксплуатацию $C_{эi}(x_{k+1}, t)$ не равны нулю.

Пусть выбраны N типов электроагрегатов, мощности которых $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а каждый электроагрегат $k+1$-го типа применяется в диапазоне мощности от x_k до x_{k+1}. Затраты на эксплуатацию для случая прямо пропорциональной зависимости стоимости эксплуатации электроагрегата от его мощности и отсутствия зависимости стоимости эксплуатации от времени в соответствии с (13) можно представить в виде следующей зависимости:

$$S_э = \sum_{i=1}^{N} X_i T_i \int_0^T \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[F(x_{k+1}) - F(k)\right] \cdot D_i \cdot x_{k+1} \right\} dt, \qquad (15)$$

где $D_i = \dfrac{M_i \cdot C_{эi}(x_{k+1})}{x_{k+1}}$ – коэффициент пропорциональности функции стоимости эксплуатации.

Будем считать, что дифференциальная функция распределения мощности $\varphi(x)$ равномерно распределена в диапазоне мощностей от x_0 до x_N; следовательно, интегральная функция распределения мощности $F(x)$ имеет такой вид:

$$F(x)=\begin{cases} b\left(x-x_0\right) & \text{при} \quad x_0 \le x \le x_N; \\ 0 & \text{при} \quad x \le x_0; \\ 1 & \text{при} \quad x \ge x_N, \end{cases} \tag{16}$$

где $b=1/\left(x_N-x_0\right)$ – коэффициент функции стоимости, выбранный из условия нормирования (3); x_0 – минимальное значение потребляемой мощности; x_N – максимальное значение потребляемой мощности, соответствующее электроагрегату с наибольшей мощностью.

Тогда в соответствии с (13) выражение для стоимости эксплуатации электроагрегатов мощности x_{k+1} в течение периода времени T_i будет иметь вид:

$$S_{эi}=b\cdot D_i\cdot T_i\cdot x_{k+1}\left(x_{k+1}-x_k\right). \tag{17}$$

Отсюда с учетом [3] записанное в безразмерном виде выражение для суммарных затрат $\widetilde{S}_M$, связанных с созданием, производством (закупкой) и эксплуатацией в течение периода времени T электроагрегатов N типов для обеспечения потребителей электроэнергией в диапазоне мощностей от x_0 до x_N имеет вид:

$$\widetilde{S}_M=\frac{S_M}{(ab+bDT)x_N^2}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{x_{k+1}}{x_N}-\frac{x_k}{x_N}\right)\frac{x_{k+1}}{x_N}+k^*\sum_{k=1}^{N-1}\frac{x_k}{x_N}, \tag{18}$$

где

$$k^*=\frac{c}{b(a+DT)x_N}. \tag{19}$$

Таким образом, задача свелась к уже решенной в [3], но вместо k следует подставлять k^*, определенное по формуле (19).

Рассмотрим теперь случай, когда имеются фиксированные типы электроагрегатов. В этом случае значения мощностей x_k уже известны и не служат предметом поиска. Метод решения задачи не имеет принципиальных отличий от изложенного в [3]. Так же, как и в предыдущем случае, выписываются уравнения для стоимости от x_0 до $x_{ф1}$; от $x_{ф1}$ до $x_{ф2}$ и т. д., где $x_{ф1}$, $x_{ф2}$ ... – фиксированные значения аргументов, далее вычисляются оптимальные значения промежуточных значений аргументов при 1, 2 и т. д. промежуточных точках стоимости для этих случаев и суммарные стоимости при различных сочетаниях числа промежуточных точек.

Рассмотрим вариант решения задачи при нелинейной интегральной функции распределения мощности $F(x)$ (рис. 2, соотношения (6), (7)). Пусть

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_п(x) = ax;\\
&F(x) = \begin{cases} b \cdot \dfrac{x^2}{2} + c \cdot x & \text{при} \quad 0 \le x \le x_N;\\ 0 \quad \text{при} \quad x \le 0; & \\ 1 \quad \text{при} \quad x \ge x_N.; & \end{cases}\\
&C_р(x) = g_1;\\
&C_э(x) = 0.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (20)
$$

Требуется выбрать оптимальный ряд.

Эта задача решается тем же способом, что и решенная в [3]. Фиксируем N, вычисляем оптимальный ряд при фиксированном N и затем вычисляем S_M. Последовательно увеличивая N, находим такую его величину, при которой S_M минимальна.

При N = 1 получаем

$$S_M = abMx_N^2 + g_1. \qquad (21)$$

При N = 2

$$S_M = abM\left(3x_N x_1^2 - x_1^3 + x_N^3 - 2x_N^2 x_1\right) + 2g_1.$$

Дифференцируя по x_1 и приравнивая производную нулю, получаем

$$6x_N x_1 - 3x_1^2 - 2x_N^2 = 0,$$

откуда

$$x_1 = x_N\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}4226x_N. \qquad (22)$$

Второй корень, как не имеющий физического смысла, отбрасывается.

Аналогичным образом задача решается при $N = 3{,}4$ и т.д. Результаты решения приведены в табл. 1.

Пользуясь данными этой таблицы, нетрудно провести расчет по выбору оптимального N и x_k.

Пример. Обработка статистических данных показывает, что мощность, требуемая потребителями электроэнергии, распределена в диапазоне от 0 до $x_N = 1000$ кВт по линейному дифференциальному закону с максимумом при минимальном значении мощности и минимумом, равным нулю, при максимальном значении мощности.

Общее число электростанций равно 1 800 шт.

Стоимость производства электростанции $C_п$ с мощностью 1000 кВт равна 100 000 грн., для других мощностей пропорциональна мощности;

стоимость разработки электростанции C_p независимо от ее мощности составляет 5 000 000 грн.

Требуется выбрать оптимальный ряд мощностей.

Исходя из формул (7) и (1), получаем

$$b \cdot M = \frac{1800}{1000^2} = 0{,}0018; \quad a = \frac{10000}{1000} = 100 \text{ грн/кВт.}$$

Пользуясь формулами табл. 1, заполняем табл. 2.

Таблица 1

Число типов N	Суммарные затраты S_M	Оптимальные значения аргументов, отнесенные к x_N
1	$abMx_N^2 + g_1$	1
2	$0{,}6154abMx_N^3 + 2g_1$	0,4226; 1
3	$0{,}5092abMx_N^3 + 3g_1$	0,2639; 0,5750; 1
4	$0{,}4606abMx_N^3 + 4g_1$	0,1909; 0,4044; 0,6561; 1
5	$0{,}4329abMx_N^3 + 5g_1$	0,1493; 0,3118; 0,4934; 0,7075; 1
6	$0{,}4199abMx_N^3 + 6g_1$	0,1225; 0,2535; 0,3961; 0,5554; 0,7433; 1

Таблица 2

Число типов N	Суммарные затраты S_N	Оптимальные значения аргументов, отнесенные к x_N
1	$100 \times 0{,}0018 \times 1000^2 + 5000000 =$ $=185000000$	1
2	$0{,}6151 \times 100 \times 0{,}0018 \times 1000^3 +$ $+2 \times 5000000 = 120\ 718\ 000$	0,4226; 1
3	$0{,}5092 \times 100 \times 0{,}0018 \times 1000^3 +$ $+ 3 \times 5000000 = 106\ 656\ 000$	0,2639; 0,5750; 1
4	$0{,}4606 \times 100 \times 0{,}0018 \times 1000^3 +$ $+ 4 \times 5000000 = 102\ 908\ 000$	0,1909; 0,4044; 0,6551; 1;
5	$0{,}4329 \times 100 \times 0{,}0018 \times 1000^3 +$ $+ 5 \times 5000000 = 102\ 922\ 000$	0,1493; 0.3118; 0,4993; 0,7075; 1

Из табл. 2 видно, что оптимальным будет ряд, состоящий из четырех типов электроагрегатов с мощностями около 200, 400, 650 и 1 000 кВт.

Выводы: 1. При требуемых потребителями мощностях, распределенных в диапазоне от $x_0 = 0$ кВт до $x_N = 1000$ кВт по квадратичному закону, общем требуемом количестве электроагрегатов 1800 шт., удельной стоимости производства электроагрегатов $a = 100$ грн/кВт, стоимости разработки, испытаний и постановки на производство электроагрегатов C_p = 5 000 000 грн., оптимальным рядом является ряд из четырех электроагрегатов с мощностями 200, 400, 650 и 1 000. Отметим, что разница в стоимости системы, состоящей из электроагрегатов 4-х типов, получается незначительной, и без большого ущерба может быть принят ряд из трех электроагрегатов с мощностями 260, 580 и 1000 кВт, если будут некоторые дополнительные соображения в пользу сокращения числа типов электроагрегатов.

2. Выбор оптимального ряда может существенно (до 20% в рассматриваемом примере) сократить затраты.

3. На основе предложенной методики возможно решение рассматриваемой одномерной задачи в общем виде, а также решение задачи выбора оптимального ряда в многомерных случаях и в случае недостаточности аргумента.

4. Рассматриваемый подход реализует метод полного перебора. Существенное сокращение числа вычислительных операций может быть достигнуто при использовании методов динамического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лагутін Г.І., Кульчицький А.Б. Вибір електростанції для системи електропостачання об'єкту управління // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2001. – Вип. 5 (15). – С. 111-115.*
2. *Кононов Б.Т., Кульчицкий А.Б., Кусакин Ю.А. Выбор перспективного ряда мощностей источников электрической энергии для образцов вооружения и военной техники // Системи обробки інформації. – Х. : ХВУ, 2002. – Вип. 1. – С. 174-177.*
3. *Кульчицкий А.Б. Задача выбора оптимального ряда (типажа) автономных электроагрегатов // Вісник НТУ „ХПІ”.. Тематичний вип. «Електроенергетика та перетворювальна техніка». – Х.: НТУ „ХПІ”, 2006. – № 7. – 185 с.*
4. *Лагутін Г.І., Рикун В.Г., Нікітюк О.Б., Кульчицкий А.Б. Задача вибору номенклатури та потужностей електростанцій для системи електропостачання військового об'єкта // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 3. – С. 104-108.*

Поступила 1.04.2006

Рецензент: доктор технических наук, профессор Б.Т. Кононов,
Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.