

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В БАЗИСАХ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.А. Красноруцкий, А.В. Коломийцев, А.А. Олексин  
(Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба)

*Установлена зависимость погрешности аппроксимации изображения, возникающей при ортогональном преобразовании в алгоритме компрессии изображений, от корреляционных характеристик аппроксимационных изображений.*

*погрешность, аппроксимация изображения, кусочно-постоянные и тригонометрические функции*

**Постановка проблемы.** Возрастающая потребность в передаче изображений во времени, близком к реальному и, в тоже время, ограниченная пропускная способность существующих технических средств, выдвигает задачу модификации методов сжатия изображений с целью снижения времени доведения информации до пользователя.

**Цель статьи.** Установление зависимости погрешности аппроксимации изображения, возникающей при ортогональном преобразовании в алгоритме компрессии изображений от корреляционных характеристик аппроксимационных изображений.

**Основной материал.** Чтобы учесть степень сложности практического осуществления ортогонального преобразования, которая зависит от типа функций, введем понятие временной сложности аппроксимации изображения.

Временная сложность  $T_A$  алгоритма аппроксимации имеет вид

$$T_A = c(L+1)^r, \quad (1)$$

где  $c$  – коэффициент аппроксимации;  $L$  – длина массива исходного изображения;  $r$  – степень сложности алгоритма.

Степень сложности алгоритма определяет количество элементарных операций, необходимых для вычисления  $N$  коэффициентов аппроксимирующего ряда по алгоритму ортогонального преобразования.

Проводилось сравнение временных сложностей алгоритма аппроксимации исходного изображения цветовой модели RGB, различных ортогональных преобразований, которые применяются в компрессии видеоданных.

При проведении исследований была задействована группа цветных изображений размерностью  $128 \times 128$ , которые можно разделить на три клас-

са:

- сильнонасыщенные,
- средненасыщенные,
- слабонасыщенные.

Оценка степени насыщенности фрагментов изображений осуществлялась на основе коэффициента корреляции.

Значение коэффициента корреляции меньше 0,7 соответствует сильнонасыщенным изображениям; от 0,7 до 0,95 – средненасыщенным и более 0,95 – слабонасыщенным изображениям [1].

В основе ДКП лежат тригонометрические или "гладкие" функции. Выражение временной сложности для этого вида преобразования приобретает вид

$$T_d = c(L+1)^{r_d}, \quad (2)$$

где  $T_d$  – временная сложность аппроксимации тригонометрическими функциями;  $c$  – коэффициент аппроксимации;  $L$  – длина массива исходного изображения;  $r_d$  – степень сложности алгоритма для вычисления  $N_d$  аппроксимирующего ряда.

В основе ДПХ и ДПУ лежат кусочно-постоянные функции. Выражение временной сложности для этого вида преобразования приобретает вид

$$T_w = c(L+1)^{r_w}, \quad (3)$$

где  $T_w$  – временная сложность аппроксимации тригонометрическими функциями;  $c$  – коэффициент аппроксимации;  $L$  – длина массива исходного изображения;  $r_w$  – степень сложности алгоритма для вычисления  $N_w$  аппроксимирующего ряда.

При построении алгоритмов ортогональных преобразований изображения, необходимо учесть методическую погрешность аппроксимации  $\delta$ , с целью сравнения базисов разложения гладких и кусочно-постоянных функций.

Методическая погрешность вызвана ошибкой аппроксимации исходного изображения конечным рядом из  $N$  базисных ортогональных функций  $\varphi_k(t)$ , заданной на интервале  $[0, T)$ , т.е. на интервале размерности строки изображения.

В общем виде величину средней энергии ошибки аппроксимации можно представить как

$$\langle \delta_x^2 \rangle = \Psi_x^2 T - \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^N \langle a_{ik}^2 \rangle \|\varphi_{ik}\|^2, \quad (4)$$

где  $\Psi_x^2$  – дисперсия процесса аппроксимации;  $\|\varphi_{ik}\|$  – норма ортогональной функции  $\varphi_{ik}(t)$ ;  $a_{ik}$  – коэффициент спектрального разложения;  $T$  – интервал базисных функций  $\varphi_k(t)$ .

Норма функций Хаара, Уолша и тригонометрических функций, за-

данных на интервале  $[0, T)$ , равна  $\sqrt{T}$ .

При аппроксимации исходного статического изображения в тригонометрическом базисе, в частности ДКП, выражение для величины средней энергии ошибки  $\langle \delta_d^2 \rangle$  примет вид [2]

$$\langle \delta_d^2 \rangle = \psi_d^2 T - \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) K(\tau) \frac{\cos(2N+1) \frac{\pi\tau}{T}}{\cos \frac{\pi\tau}{T}} d\tau, \quad (5)$$

где  $K(\tau)$  – корреляционная функция изображения.

Величина средней энергии ошибки  $\langle \delta_w^2 \rangle$  при использовании в качестве базиса разложения систему ортогональных функций Уолша примет вид [2]

$$\langle \delta_w^2 \rangle = \psi_w^2 T - \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) K(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M 2^{2m-1} \int_0^{\frac{T}{2^m}} \left( \frac{T}{2^m} - \tau \right) \left[ 2K(\tau) - K\left(\frac{T}{2^m} - \tau\right) - K\left(\frac{T}{2^m} + \tau\right) \right] d\tau, \quad (6)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$  – номер группы функций Уолша;  $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{m-1}$  – номер функции Уолша внутри группы;  $M$  – число используемых групп функции Уолша.

Корреляционная функция изображения имеет вид

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – эквивалент ширины энергетического спектра случайного процесса модулируемой строки изображения;  $\tau$  – условная размерность расстояния между двумя физически соседними пикселями, которые реагируют на различные значения интенсивности.

Усеченные ряды по функциям Хаара и Уолша, содержащие одинаковое число групп  $M$ , дают одинаковую среднюю энергию ошибки аппроксимации [2].

При фиксированном значении  $\tau$  коэффициент корреляции исходного изображения определяет ширина энергетического спектра  $\alpha$ . С ростом ширины энергетического спектра коэффициент корреляции изображения уменьшается, то есть изображение становится более насыщенным.

На рис. 1 представлена зависимость методической ошибки  $\delta$  от ширины энергетического спектра  $\alpha$  аппроксимируемого изображения, при фиксируемых значениях  $T$  и  $N$  для кусочно-постоянных функций

(пунктир) и тригонометрических функций (сплошная линия).

При фиксируемом числе слагаемых  $N$  в базисе аппроксимирующих функций и при фиксируемом размере строки изображения  $T$  с ростом ширины энергетического спектра  $\alpha$  возрастает величина методической ошибки аппроксимации строки изображения в базисе кусочно-постоянных функций больше чем в тригонометрическом базисе. Таким образом, ошибка  $\delta$  для базиса кусочно-постоянных функций больше чем тригонометрического практически во всем диапазоне.

При фиксированных значениях ширины энергетического спектра  $\alpha$  и размерности строки изображения  $T$ , установлена зависимость ошибки  $\delta$  от количества слагаемых  $N$  в базисе аппроксимирующих функций для исходных изображений: сильнонасыщенных (рис. 2, а), средненасыщенных (рис. 2, б), и слабонасыщенных (рис. 2, в).

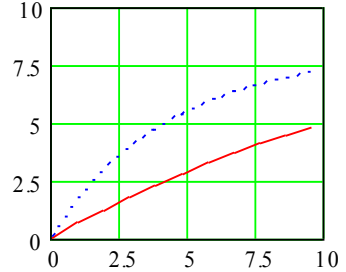
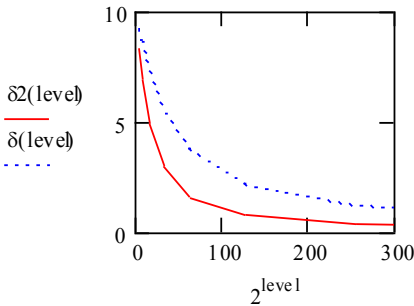
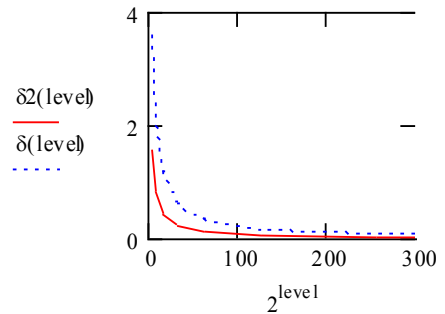


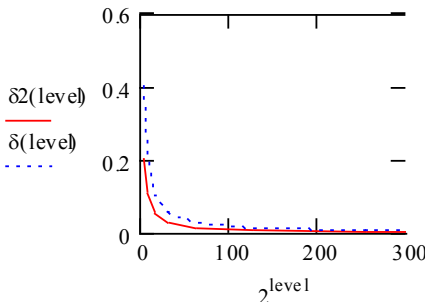
Рис. 1. График зависимости методической ошибки аппроксимации от ширины энергетического спектра для  $T = \text{const}$  и  $N = \text{const}$



а – сильнонасыщенные изображения  
 $\alpha = 10$ ;  $K(\tau) = 0,05$



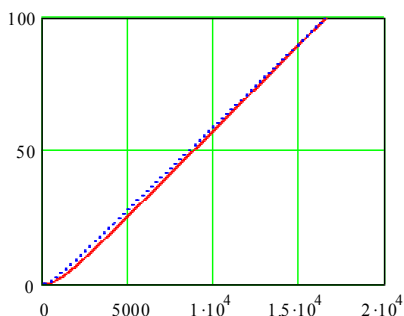
б – средненасыщенные изображения  
 $\alpha = 0,6$ ;  $K(\tau) = 0,835$



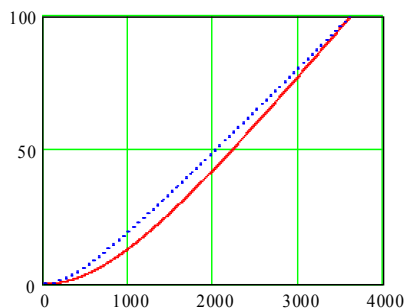
в – слабонасыщенные изображения  
 $\alpha = 0,05$ ;  $K(\tau) = 0,985$

Рис. 2. График зависимости методической ошибки аппроксимации от количества базисных функций для  $T = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$

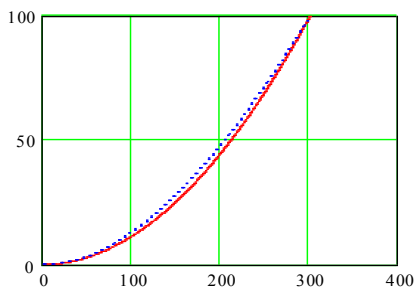
При фиксированных значениях ширины энергетического спектра  $\alpha$  и количества слагаемых  $N$  в базе аппроксимирующих функций, установлена зависимость ошибки  $\delta$  от размерности строки изображения  $T$ , для исходных изображений: сильнонасыщенных (рис. 3, а), среднена- насыщенных (рис. 3, б), и слабонасыщенных (рис. 3, в).



а – сильнонасыщенные изображения  
 $\alpha = 10; K(\tau) = 0,05$



б – среднена- насыщенные изображения  
 $\alpha = 0,6; K(\tau) = 0,835$



в – слабонасыщенные изображения  
 $\alpha = 0,05; K(\tau) = 0,985$

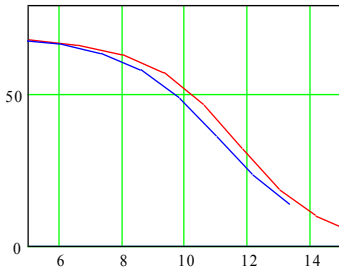
Рис. 3. График зависимости методической ошибки аппроксимации от размерности строки изображения  $T$  для  $N = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$

Трудоёмкость алгоритмов вычисления ДКП –  $2N \log_2 N$  операций сложений/вычитаний и  $2N \log_2 N$  операций умножений. Трудоёмкость алгоритмов вычисления ДПХ и ДПУ не хуже  $2N \log_2 N$  операций сложений/вычитаний [3, 4].

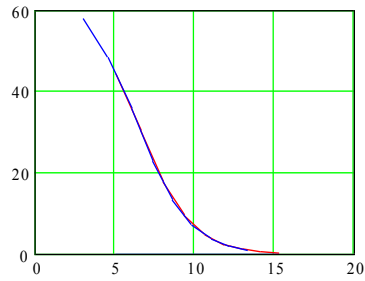
На рис. 4 приведен график зависимости ошибки аппроксимации от числа элементарных операций  $S$ , необходимых для вычисления  $N$  коэффициентов аппроксимирующего ряда.

Из графика следует, что количество операций, соответственно и время вычисления необходимое для достижения фиксируемой точности аппроксимации исходного изображения значительно меньше у функций Уолша чем у тригонометрических функций только для сильнонасыщенных изображений.

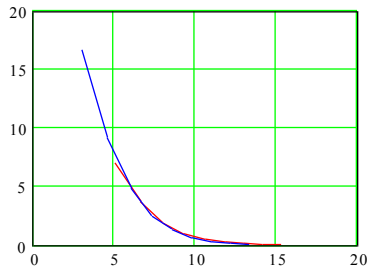
$$d_{\text{level}=4}^3 := d_{\text{level}}^2$$



а – сильнонасыщенные изображения  
 $\alpha = 10; K(\tau) = 0,05$



б – средненасыщенные изображения  
 $\alpha = 0.6; K(\tau) = 0.835$



в – слабонасыщенные изображения  
 $\alpha = 0,05; K(\tau) = 0,985$

Рис. 4. График зависимости методической ошибки аппроксимации от числа элементарных операций  $S$ , необходимых для вычисления  $N$  коэффициентов аппроксимирующего ряда для  $T = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$

**Выводы.** Для специальных классов изображений, которые не обладают определенной гладкостью, применение базиса Уолша эффективнее базиса тригонометрических функций, если в качестве критерия использовать сложность машинной реализации, а, следовательно, и простоту при практической реализации, которая выражается в уменьшении временной сложности аппроксимации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Королева Н.А., Красноуцкий А.А. Кодирование трансформант преобразований Уолша. // *Збірник наук. праць ХУПС*. – Х.: ХУПС, 2005. – Вип. 1(1). – С. 101-103.
2. Тисленко Г.Л., Чернищев А.В. Погрешность представления стационарных случайных процессов в базисах функций Хаара, Уолша и тригонометрических функций // *Радиотехника*. – 1974. – Т. 29, № 10. – С. 12-17.
3. Прэнтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – Кн. 1. – 312 с; Кн. 2. – 480 с.
4. Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

Поступила 12.04.2006

**Рецензент:** доктор технических наук, профессор Ю.В. Стасев,  
 Харьковский университет Воздушных Сил им. И.Кожедуба.