

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

УДК.681.324

О РАСПОЗНАВАТЕЛЬНОМ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ВАРИАНТАХ ЗАДАЧИ «ВЫПОЛНИМОСТЬ»

С.В. Листровой¹, Е.С. Листровая²

(¹Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба,

²Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»)

В работе показано, что вариант распознавания, выполнима ли произвольная булева функция или нет, полиномиально разрешим, а вычислительный вариант задачи, когда нужно указать набор переменных, на котором функция принимает значение «истинно», имеет экспоненциальную сложность.

экспоненциальная сложность, задача «выполнимость»

Введение. Класс задач NP [1 – 3] вводился, как более общий класс распознавания, включающий в себя класс P. В общем случае вариант распознавания комбинаторных задач оптимизации имеет следующий вид.

По входным данным S и целому числу L определить существует такое допустимое решение $f \in F$, что стоимость $C(f) \leq L$, где F – множество допустимых решений. Вариант распознавание представляет собой вопрос, на который нужно ответить да или нет, в отличие от вычислительного варианта комбинаторной задачи оптимизации, где требуется найти стоимость оптимального решения. В теории NP-полных задач обе задачи рассматриваются в единой постановке, основанной на предположении, что для решения вычислительной задачи можно эффективно использовать любой алгоритм задачи распознавания. Покажем, что данное предположение не верно на примере задачи «3-выполнимость», для которой можно построить алгоритм устанавливающий «истинность» булевой функции за полиномиальное время, а представление удостоверения подтверждающего решение задачи распознавания осуществить только за экспоненциальное время.

Постановка задачи на исследование. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в конъюнктивной форме записи

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^{\sigma_{11}} \vee x_2^{\sigma_{12}} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_{1n}}) \wedge \dots \wedge (x_1^{\sigma_{m1}} \vee x_2^{\sigma_{m2}} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_{mn}}),$$

$$\text{где } x_i^{\sigma_{jk}} = \begin{cases} x_i, & \text{при } \sigma = 1; \\ \bar{x}_i & \text{при } \sigma = 0. \end{cases}$$

Операции \vee , \wedge являются булевыми и моделируют простейшие логические высказывания: \vee – «ИЛИ»; \wedge – «И». Для любого двоичного набора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция принимает одно из двух возможных значений: единицу или нуль. Задача «выполнимость» заключается в ответе на вопрос: существует ли набор значений переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, обращающий функцию $f(x)$ в единицу. Из [3] известно, что задача «k-выполнимость», т.е. с k-литералами в каждой скобке логической функции, за полиномиальное время может быть сведена к задаче «3-выполнимость» с тремя литералами в каждой скобке. Как показано в [3], если дизъюнкт C_t содержит k-переменных $C_t = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k)$, $k > 3$, то возможна замена C_t на $(k - 2)$ дизъюнкта

$$(x_1 \vee x_2 \vee u_1)(\bar{u}_1 \vee x_3 \vee u_2)(\bar{u}_2 \vee x_4 \vee u_3) \dots (\bar{u}_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k),$$

где u_1, u_2, u_{k-3} – новые переменные причем набор новых дизъюнктов выполним тогда и только тогда, когда выполним дизъюнкт C_t . После сведения задачи «k-выполнимость» к «3-выполнимость» число дизъюнктов возрастет в $(k - 2)$ раза, а число переменных в $(k - 3)$ раза. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать задачу «выполнимость», в которой в каждом дизъюнкте C_t содержится число литералов, не превышающее трех, поскольку те дизъюнкты, в которых число литералов $k > 3$ всегда можно заменить на $k - 2$ дизъюнкта, содержащих по три литерала.

Введем понятие минимальной дизъюнктивной формы F_n произвольной булевой функции f от двух и трех переменных с минимальным числом дизъюнктов r , при которых F_n принимает значение «ложно» на всех возможных наборах переменных. Для этого рассмотрим двудольный граф G_{22} (рис. 1), где одну долю образуют переменные (a, b) , а вторую – переменные (\bar{a}, \bar{b}) . В графе ребрами соединены те вершины, которые не являются инверсными.

Для возникновения противоречия в булевой функции необходимо, чтобы присутствовали как переменные (a, b) , так и (\bar{a}, \bar{b}) . Совершенное паросочетание в графе G_{22} дает все возможные дополнения сочетаний переменных, которые можно соединить между собой ребром, поскольку эти вершины в графе не инверсные. Дополнение дизъюнктов, содержащих переменные (a, b) и (\bar{a}, \bar{b}) дизъ-

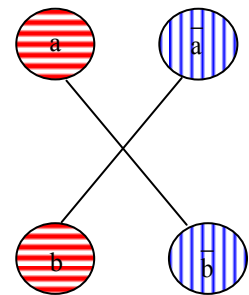


Рис. 1. Граф G_{22}

юнктами, содержащими переменные, обусловленные совершенным паросочетанием в графе G_{22} , позволит получить минимальную форму

$$F_{2л} = (a \vee b)(\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee \bar{b})(b \vee \bar{a}). \quad (1)$$

Аналогичным образом построим минимальную форму для функции трех переменных. Снова рассмотрим двудольный граф G_{33} (рис. 2).

В графе G_{33} существует два совершенных паросочетания (рис. 3).

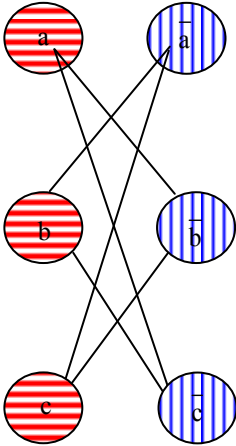


Рис. 2. Граф G_{33}

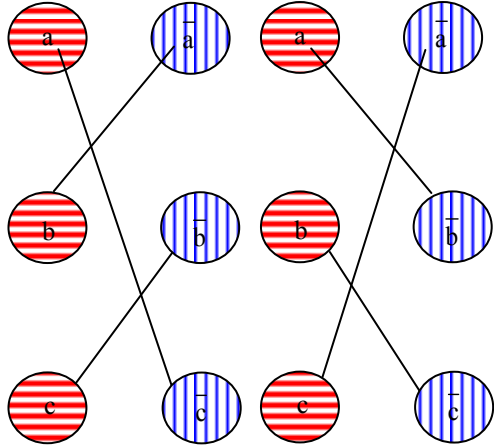


Рис. 3. Совершенные паросочетания графа G_{33}

Поскольку их два, то для булевой функции с тремя переменными можно построить две минимальных формы $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$, где:

$$F_{3л1} = (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{c})(b \vee \bar{a})(c \vee \bar{b}); \quad (2)$$

$$F_{3л2} = (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{b})(b \vee \bar{c})(c \vee \bar{a}). \quad (3)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать булевы функции только с тремя литералами в дизъюнкциях, поэтому преобразуем $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$ к такому виду.

Для этого добавим в каждую скобку, содержащую две переменных, третью переменную w и умножим функции $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$ на множитель

$$(\bar{w} \vee g \vee u)(\bar{w} \vee g \vee \bar{u})(\bar{w} \vee \bar{g} \vee u)(\bar{w} \vee \bar{g} \vee \bar{u}),$$

с фиктивными переменными.

При этом минимальные формы $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$ примут вид:

$$F_{3л1}^1 = (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{c} \vee w)(b \vee \bar{a} \vee w)(c \vee \bar{b} \vee w) \times (\bar{w} \vee g \vee u)(\bar{w} \vee g \vee \bar{u})(\bar{w} \vee \bar{g} \vee u)(\bar{w} \vee \bar{g} \vee \bar{u}); \quad (4)$$

$$F_{3л2}^1 = (a \vee b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(a \vee \bar{b} \vee w)(b \vee \bar{c} \vee w)(c \vee \bar{a} \vee w) \times (\bar{w} \vee g \vee u)(\bar{w} \vee g \vee \bar{u})(\bar{w} \vee \bar{g} \vee u)(\bar{w} \vee \bar{g} \vee \bar{u}). \quad (5)$$

Такое добавление переменных приводит к тому, что переменная w будет принимать значение «ложно» в любом наборе истинности, выполняющем $F_{3лл}^1$ и $F_{3лл}^1$, поэтому дизъюнкты, содержащие по две переменные, будут эквивалентны заменяемым их дизъюнктам.

Итак, мы избавились от всех дизъюнктов, в которых число литералов отлично от трех и показали, что полученные формулы $F_{3лл}^1$ и $F_{3лл}^1$ выполняемы тогда и только тогда, когда выполнимы $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$, а поскольку последние невыполнимы ни на одном наборе переменных, то и $F_{3лл}^1$ и $F_{3лл}^1$ невыполнимы ни на одном наборе переменных образующих данные функции.

Рассмотренные минимальные формы обладают важным свойством, заключающимся в том, что уменьшение числа дизъюнктов хотя бы на один или изменение знака инверсии в произвольном литерале или самого литерала на другой приводит к тому, что измененная функция F_l становится невыполнимой, в чем легко можно убедиться, анализируя непосредственно соотношения для $F_{л2}$, $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$. Аналогичным свойством обладают и функции $F_{3лл}^1$ и $F_{3лл}^1$, поскольку преобразование, примененное к функциям $F_{3л1}$ и $F_{3л2}$, не изменило их свойств.

Утверждение 1. Если существует булева функция f с числом литералов в каждом дизъюнкте равным трем, то она может получить значение «ложно» на всех наборах переменных, тогда и только тогда, когда на основе какого-либо дизъюнкта этой функции можно построить функции $F_{3лл}^1$ и $F_{3лл}^1$.

Доказательство. Если мы можем построить одну из функций $F_{3лл}^1$ или $F_{3лл}^1$, которые на всех наборах переменных принимают значение «ложно» на основе одного из дизъюнктов булевой функции f , то, поскольку f содержит в себе $F_{3лл}^1$ или $F_{3лл}^1$ в качестве сомножителя, то и она на всех наборах переменных примет значение «ложно» и, следовательно, условие утверждения 1 можно рассматривать как необходимое условие того, что булева функция f может принять значение «ложно» на всех наборах переменных.

Предположим теперь, что нет ни одного дизъюнкта функции f , на основе которых можно было бы построить функции $F_{3лл}^1$ или $F_{3лл}^1$. И пусть при этом на всех наборах переменных функция f принимает значение «ложно». Последнее возможно, если какая-то часть функции f на всех наборах примет значение «ложно», в свою очередь это возможно только если в качестве сомножителя в ней содержится $F_{3лл}^1$ или $F_{3лл}^1$, т.е.

мы пришли к противоречию. Следовательно, предположение о том, что при невыполнении условия утверждения 1 булева функция может принять значение «ложно» на всех наборах переменных неверно и поэтому условие утверждения 2 является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы произвольная булева функция принимала значение «ложно» на всех наборах переменных.

Из утверждения 1 вытекает интересное следствие, заключающееся в том, что не существует булевых функций, состоящих из трех литералов в каждой дизъюнкции, принимающих значение «ложно» на всех наборах переменных, если число дизъюнктов в ней меньше девяти. Таким образом, если число дизъюнктов в задаче «3-выполнимость» меньше девяти, то всегда существует набор переменных, на котором булева функция выполняется, независимо от числа различных переменных используемых в дизъюнктах.

Проверка утверждения 1 для одного дизъюнкта требует проведения не более $27m$ операций сравнения для одной из функций ($F_{3\text{дл}}^1$ или $F_{3\text{дл}}^2$). Проверка его для всех m дизъюнктов и обеих функций займет не более $54m^2$. Следовательно, временная сложность установления факта выполнимости произвольной булевой функции в задаче «3-выполнимость», не превысит в общем случае $O(54m^2)$.

Заключение. Таким образом, необходимые и достаточные условия возникновения случая, когда булева функция принимает на всех наборах переменных значение «ложно», могут быть определены для произвольной функции за полиномиальное время. Однако, в случае, когда функция выполнима, легко показать, что для установления набора переменных, на котором функция принимает значение «истинно» потребуется экспоненциально большое время. И, следовательно, вычислительный вариант задачи «3-выполнимость», когда нужно указать набор переменных, на котором функция принимает значение «истинно», оказывается существенно более сложным, чем вариант распознавания выполнима ли данная функция или нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cook S.A. *The Complexity of Theorem Proving Procedures*, Proc. 3rd ACM SYMP on the Theory of Computing, ACM (1971). – P. 151-158.
2. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* – М.: Мир, 1982. – 336 с.
3. Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* – М.: Мир, 1985. – 512 с.

Поступила 16.05.2006

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.