УДК 531.19

Ю.П. Мачехин

# ОСОБЕННОСТИ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

*Проведен сравнительный анализ условий применения методов оценки результатов измерений в динамических детерминированных системах с регулярным поведением и в нелинейных динамических системах с хаотическим поведением. Показано, что поведение хаотических систем приводит к аномальному разбросу результатов измерений.*

***истинное значение, неопределенность, хаотическое поведение, нелинейная динамическая система***

**Введение.** Развитие методов анализа результатов измерений непосредственным образом связано с формированием новых физических моделей и адекватных математических методов описания объектов измерений и процессов, влияющих на их состояние. В [1] было предложено рассматривать процесс развития физических и математических моделей оценки результатов измерений, условно разделив его на три этапа. Первые два этапа были направлены на разработку моделей и методов корректного учета случайных и систематических возмущений при измерении физических величин, характеризующих устойчивые статические и динамические системы. Третий этап развития физических моделей и методов анализа результатов измерений стал формироваться на основе результатов теоретических и экспериментальных исследований стохастических режимов в поведении нелинейных динамических систем [2].

В настоящем работе на примере динамических систем, описываемых логистическим уравнением [3], показано каким образом параметры стохастического режима поведения детерминированной динамической системы влияют на оценку результатов измерений.

**Анализ основных положений теории измерений.** Для установления принципиальных особенностей анализа результатов измерений при стохастическом поведении исследуемой динамической системы в работе были проанализированы традиционные условия проведения и анализа результатов измерений.

Современная теория измерений основана на двух физических моделях. Первая устанавливает, что любая измеряемая физическая величина имеет истинное значение. Вторая модель рассматривает случайный разброс результатов измерений как случайный эргодический процесс. Обе модели позволяют вычислять и уточнять результаты измерений по мере уточнения условий проведения измерений и совершенствования используемых математических методов обработки результатов измерений.

В общем случае, когда измеряемая величина $X$ определяется в результате косвенных измерений, т.е. определяется из уравнения

$$X = f(Y), \tag{1}$$

где $Y$ – входная, непосредственно измеряемая величина, то процесс определения истинного значения можно условно описать следующим математическим выражением:

$$X = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^{(m)}\left(Y_i^{(m)}\right), \tag{2}$$

где $Y_i^{(m)}$ – результат i-го наблюдения при $m$ – х начальных условиях. Вычисление предела при $m \to \infty$ предполагает последовательное уточнение начальных условий. В результате уточнения начальных условий осуществляется уменьшение как систематической, так и случайной составляющей погрешности определения искомой величины $X$.

Фундаментальность связи основных понятий теоретической метрологии с одной стороны и понятий классического детерминизма с другой стороны заключается в едином подходе к определению значения физической величины через точность начальных условий состояния исследуемой системы. Чем точнее могут быть заданы начальные условия, тем точнее может быть определено значение физической величины.

В реальном физическом эксперименте математический предел определить невозможно (хотя бы в силу конечности времени, отведенного на измерение). Поэтому по результатам измерений, даже очень многочисленным, определяется не истинное значение, а действительное значение [4]. Это означает, что нет физических условий для достижения приведенных в (2) пределов, т.е неопределенность. начальных условий измерительного эксперимента нельзя уменьшать до бесконечно малой величины.

Начальные условия для любой физической детерминированной системы могут быть установлены с малой, но всегда конечной неточностью или неопределенностью, т.е индекс $m$ в (2), указывающий на точность установления начальных условий, всегда имеет физически обоснованное конечное значение. Этому условию соответствуют постановки физических задач в рамках классической механики, когда начальные условия заданы в виде интервалов возможных значений исходных величин. Такая постановка задачи соответствует реальным физическим ситуациям и является практическим подтверждением введенного в [5] понятия физически оправданного детерминизма. Переход от классического детерминизма к физически обоснованному детерминизму в постановке измерительных задач фактически был осуществлен сразу, как только стали использовать вероятностную форму описания начального состояния объектов измерений, а также результатов измерительного процесса.

Не смотря на идеализированность физических условий, при которых определяется истинное значение физической величины, применение этого понятия возможно и целесообразно в том случае, когда оно используется при выполнении калибровки и поверки средств измерительной техники.

Вторая физическая модель, позволяет рассматривать случайный разброс результатов измерений, как эргодический случайный процесс. Математическое описание эргодичности случайного процесса может основываться на разных характеристиках, однако основная из них, представляющая интерес для теории измерений, – это эквивалентность усреднения во времени случайного процесса и усреднения по ансамблю всех возможных состояний, реализуемых случайным процессом при времени наблюдения за системой $t \to \infty$.

Для метрологии эргодичность случайных вариаций измеренных значений физической величины является наиболее удовлетворительным, если не единственным обоснованием одновременного применения как временного усреднения, так и усреднения по вероятностному закону распределения возможных состояний. Это значит, что если среднее во времени любой функции f(t) определяется как

$$\bar{f} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau), \qquad (3)$$

где N – количество наблюдений; $\tau$ – время между наблюдениями, а среднее по ансамблю возможных реализаций

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)P(z)dz, \qquad (4)$$

где P(z) – плотность вероятности, то эргодичность процесса f означает, что существует решение у эргодического уравнения

$$\langle f \rangle = \bar{f}. \qquad (5)$$

В результате решения уравнения (7) устанавливается значение действительного числа, которое соответствует истинному значению измеряемой величины. Также как и в случае определения истинного значения через предельный переход, решение эргодического уравнения не имеет физического смысла, пока не определены пределы суммирования и интегрирования. Но как только введены ограничения на предельные переходы, сразу возникает конечная область возможных числовых значений измеряемой физической величины.

Таким образом, следуя проведенному выше анализу физических моделей представления объектов и методов измерений, статистический разброс результатов измерений в детерминированной динамической системе соизмерим с разбросом значений начальных условий.

Принципиально важным в развитии методов оценки качества результатов измерений на основе вероятностного подхода является то, что в процессе измерений устанавливается значение физической величины, соответствующее устойчивому состоянию исследуемой системы. Иначе, в соответствии с условием детерминированного поведения исследуемых систем, неопределенность измерений в этих системах представляет собой линейную комбинацию неопределенности задания начальных условий.

**Влияние стохастичности поведения динамической системы на оценку результатов измерений.** Принципиально иная ситуация может наблюдаться при выполнении измерений в нелинейных динамических системах, в которых могут развиваться стохастические режимы [6].

Для исследования условий, при которых динамика поведения исследуемой динамической системы влияет на случайный разброс результатов измерений, в работе были рассмотрены динамические системы, которые описываются дифференциальным уравнением [6]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, \mu), \qquad (6)$$

с начальным условием $x(t=0) = x_0$ и управляющим параметром $\mu$.

Конкретный вид функции $f(x,\mu)$ определяется физическими свойствами исследуемой системы. Хорошо известный в литературе [2] частный случай этого дифференциального уравнения в дискретно-разностном виде описывает большое количество реальных нелинейных систем:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \qquad (7)$$

В общем случае на характер поведения этого однопараметрического квадратичного отображения уравнения влияет численное значение управляющего параметра $\mu$. Реальному состоянию физической системы соответствуют устойчивые точки (7). Соответственно и результат измерений величины $x(\mu)$ будет зависеть от наличия предела

$$x(\mu) = \lim_{n\to\infty} x_n(\mu). \qquad (8)$$

В зависимости от численного значения параметра μ, который принимает значения от 0 до 4, результаты отображения могут качественно отличаться друг от друга Для установления условий, при которых поведение системы влияет на результаты измерений, достаточно рассмотреть на качественном уровне изменение характера решения уравнения (7) в зависимости от значения управляющего параметра μ [2]:

1) $0 < \mu \le 1$. Решение представляет собой устойчивую притягивающую неподвижную точку $x = 0$;

2) $1 < \mu \le 3$. Квадратичное отображение имеет одну единственную неподвижную притягивающую точку $x^{(1)}$, которая характеризуется значением

$$x^{(1)} = 1 - 1/\mu\,, \tag{9}$$

которое устанавливается при любых начальных условиях $x_0$.

Это решение представляет собой уравнение измерения величины $x^{(1)}$. Результаты прямых или косвенных наблюдений параметра $\mu_k$ полностью обеспечивают определение среднего значения $\overline{x^{(1)}}$ и стандартную неопределенность $u_c(x^{(1)})$:

$$\overline{x^{(1)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 - 1/\mu_k)\,; \tag{10}$$

$$u_c(x^{(1)}) = 1/\mu^2 u_c(\mu)\,. \tag{11}$$

Т.е. неопределенность результата измерения значения величины $x^{(1)}$ зависит только от неопределенности оценки величины параметра μ;

3) $3 < \mu \le 3{,}44948$. Вместо одной неподвижной точки в решении уравнение образуются две устойчивые неподвижные точки, значения которых определяются значением параметра μ:

$$x^{(2),(3)} = \left[\mu + 1 \pm \left(\mu^2 - 2\mu - 3\right)^{1/2}\right]/2\mu\,. \tag{12}$$

Среднее значение устойчивых точек и неопределенность результата измерения этих значений, также как и в предыдущем случае, определяются результатами измерения параметра μ;

4) $3{,}5699 < \mu \le 4$. Этот интервал значений параметра μ представляет особый интерес. Преобразование (7), реализуемое при значениях параметра μ в указанном интервале значений, приводит к хаотическому изменению значений величин $x_n$ внутри единичного квадрата области определения [2]. Т.е., когда $n \to \infty$, то каждая новая итерация приводит к установлению значения $x_n$, которое не совпадает с предыдущим значением $x_{n-1}$. В итоге, результатом итераций рассматриваемого квадратичного отображения при любых начальных условиях становится не устойчивая предельная точка, а область всех возможных значений $x_n$. В этой области случайные значения $x_n$ описываются функцией плотности вероятностей $\varphi(x_n, \mu)$, которая в свою очередь зависит от параметра μ.

Свойства квадратичного отображения таковы, что для каждого значения $\mu_i$ формируется своя функция плотности вероятности $\varphi(x_n, \mu_i)$. Среднее значение $\overline{x_i}$ будет определяться через соответствующую функцию плотности вероятности

$$\overline{x_i} = \int_0^1 x\varphi_i(x, \mu_i)\,dx\,. \tag{13}$$

Особенность этого уравнения заключается в том, что функции $\varphi_i$ в силу экспоненциальной чувствительности отображения к начальным значениям $\mu_i$ будут сильно отличаться друг от друга. Малые изменения параметра $\mu_i$ приводят к существенному изменению характера функции $\varphi(x_n, \mu_i)$, что в свою очередь приводит к существенному изменению значения $\overline{x_i}$. Квадратичное отображение обладает свойством эргодичности и перемешивания с экспоненциальной расходимостью близких траекторий [6].

Среднее значение результата измерения $\overline{x}$ определяется как

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{x_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x, \mu_i)\,dx\,, \tag{14}$$

а стандартная неопределенность:

$$u_c{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\overline{x_i} - \overline{x})^2\,. \tag{15}$$

Результат измерения $\overline{x}$ будет определяться только динамикой квадратичного отображения, которая существенно зависит от значения управляющего параметра μ. Два близких значения этого параметра приводят к двум существенно отличающимся друг от друга решениям. Это значит, что при нормальном законе разброса значений параметра μ, разброс значений $\overline{x_i}$ будет аномально большим.

Пусть интервал между наблюдениями величины $x_n$ равен τ, а количество наблюдений равно N. Время T характеризует интервал между последовательными отображениями, реализуемыми уравнением (7).

Если $N \cdot \tau \le T$, то в результате измерения на n-ой итерации будет установлено значение $\overline{x_n}$ с погрешностью $\Delta x_n$, которая определяется погрешностью Δμ. Однако после очередного отображения будет установлено другое значение $x_{n+1}$, измерение которого будет выполнено с такой же погрешностью. И каждый раз, как только происходит очередное отображение, устанавливается новое, случайным образом измененное, значение измеряемой величины.

Если время τ между измерениями величины x больше интервала времени Δt, в течение которого реализуется отображение, то в результате многократных наблюдений будет зафиксирован ряд случайных значений $x_n$. При этом ни случайный разброс значений начального условия $x_0$, ни случайный разброс значений параметра $\mu$ не влияют на область случайных изменений значений x. Поскольку область хаотического изменения величины x ограничена, то можно эту область рассматривать как устойчивое состояние, но в данном случае оно будет статистически «размазано» за счет поведения исследуемой системы.

Случайная последовательность значений $x_n$, обусловленная динамикой поведения системы, характеризуется функцией плотности вероятности распределения, свойственной только данной системе.

**Заключение.** В работе рассмотрена модель хаотического поведения динамической системы, описываемая логистическим уравнением. Чувствительность функции плотности вероятности результатов итерационного процесса от управляющего параметра проводит к существенному, аномальному разбросу результатов измерений.

Таким образом, в рассмотренном случае влияние эргодических процессов на результат измерений в динамической системе с регулярным поведением принципиально отличается от влияния стохастического поведения динамической системы на результаты измерений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Мачехин Ю.П.* Обоснование методов статистической обработки результатов измерений в нелинейных динамических системах. Ч. 1 // УМЖ. –2003. – Вып. 4. – С. 15-21.

2. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990. – 270 с.

3. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.

4. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 301 с.

5. *Борн М.* Возможно ли предсказание в классической механике // Успехи физических наук. – 1959. – Т. 49, № 2. – С. 13-47.

6. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит-ры, 1987. – 382 с.

*Поступила 30.03.2006*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.