

УДК 681.518.3.08

В.Д. Циделко, Н.А. Яремчук, М.В. Василенко

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ
КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ НЕВОЗМОЖНОСТИ
ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ**

В данной работе величины-аргументы с расширенными неопределенностями представлены в виде нечетких чисел. Исследованы способы оценивания расширенной неопределенности косвенного измерения, основанные на интервальном анализе, с использованием действий с нечеткими числами.

косвенное измерение, расширенная неопределенность, нечеткие числа

Исследование проводилось для косвенных однократных измерений при условии представления результатов измерения аргументов в виде значений с расширенными неопределенностями, представленными границами интервалов. При этом уравнение косвенного измерения являлось нелинейным. Исследование заключалось в сравнении двух методов решения задачи: метода интервального анализа (интервальной арифметики) [1, 2] и метода интервального анализа с линеаризацией [3]. Характерной особенностью интервальных методов является получение двусторонних границ для искомых результатов. С помощью положений [4] эти границы могут быть

представлены в виде результата и расширенной неопределенности. С другой стороны результат (число) с зоной рассеивания вокруг него (расширенной неопределенностью) может интерпретироваться как нечеткое число, действия с которыми аналогичны действиям интервального анализа. В работе рассмотрены особенности вычисления результата и неопределенности с помощью нечетких чисел [5]. Недостатком методов интервального анализа является то, что во многих случаях они дают явно завышенные результаты при вычислении границ неопределенности. Поэтому проведено исследование возможностей получения расширенной неопределенно-

сти для уровня доверия, меньшего единицы.

При расчете погрешности косвенного измерения широко используется формула Тейлора, представляющая собой разложение в ряд функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, характеризующей косвенное измерение [6]:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m} (x_i - \tilde{a}_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m} (x_i - \tilde{a}_i) \cdot (x_j - \tilde{a}_j) + \dots, \quad (1)$$

где x_i – неизвестное истинное значение; a_i – результат измерения величины – аргумента (оценка i -го измеряемого аргумента), $\Delta_i = (\tilde{a}_i - x_i)$ – погрешность измерения.

Учитывая знак погрешности, выражение (1) представляют в виде

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m)}{\partial x_i} \Delta_i + R_1, \quad (2)$$

где R_1 – остаточный член ряда.

Для того, чтобы не вводить производные в случайных точках $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$, в работе [7] предложено выражение (2) записать наоборот, заменив разложение функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ разложением функции $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m)$, т.е.

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_i} \Delta_i + R'_1, \quad (3)$$

В последнем равенстве производные вычисляются в точках x_1, x_2, \dots, x_m , поэтому математическое ожидание –

$$M[f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m)] = y + M[R_1] \quad (4)$$

или

$$y = M[f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m)] + R_1. \quad (5)$$

Отклонения Δ_i при этом должны быть взяты из возможных значений погрешностей так, чтобы они максимизировали функцию

$$f(x_1 + \Delta_1, x_2 + \Delta_2, \dots, x_m + \Delta_m).$$

При существенности остаточного члена линеаризация уравнения косвенного измерения становится невозможной. В этом случае для оценивания результата косвенного измерения и неопределенности используется интервальный анализ, в основе которого лежит замена числа интервалом. Так как представление результата измерения интервалом, содержащим истинное значение величины, широко распространено, то интервальные методы начинают широко использоваться в измерительной практике. Если для

исходных данных косвенных измерений заданы интервалы, то с помощью интервальных методов можно получить двусторонние интервалы для конечных результатов измерений. Однако основные операции над интервалами отличаются от операций над числами. Для интервалов вычитание не обратное сложению, интервальное деление не обратное умножению. Дистрибутивность чисел для интервалов выполняется лишь частично. Интервальные расширения функций нужно также анализировать конкретно. Итогом интервального анализа являются границы результата косвенного измерения: нижняя Y_l и верхняя Y_h . Согласно [4], результат измерения Y и расширенную неопределенность находят из соотношений:

$$Y = \frac{1}{2}(Y_l + Y_h); \quad U = \frac{1}{2}(Y_h - Y_l). \quad (6)$$

При автоматизации вычисления результата косвенного измерения с неопределенностью исходные данные и результат могут быть представлены с помощью нечетких чисел [5]. Нечеткие числа могут быть представлены тройкой

$$A = [A - \Delta A; A; A + \Delta A],$$

где A – так называемое «центральное измеренное значение»; ΔA – граница интервала или расширенная неопределенность с уровнем доверия 1.

Тогда, например, произведение двух нечетких чисел

$$A = [A - \Delta A; A; A + \Delta A] \text{ и } B = [B - \Delta B; B; B + \Delta B],$$

при условии $A \in R^+, B \in R^+$, может быть представлено следующим образом

$$A \otimes B = ((A - \Delta A) \cdot (B - \Delta B); A \cdot B; (A + \Delta A) \cdot (B + \Delta A)).$$

Умножение нечетких чисел в R выполняется сложнее, чем в R^+ . Нечеткие числа могут быть также представлены в виде интервалов доверия или областей доверия. Интервал или область доверия должны быть выпуклыми. В этом случае числа A и B представляют в виде границ $A = (a_1; a_2)$, $B = (b_1; b_2)$, а произведение интервалов доверия имеет вид, при

$$A \in R^+, B \in R^+;$$

$$A \otimes B = (a_1 \cdot b_1; a_2 \cdot b_2).$$

Если исходные данные представлены в виде чисел A и B , уравнение косвенного измерения в виде $Y = A \otimes B$, то результат (6) для первой формы нечеткого числа выглядит как

$$Y = \frac{(A - \Delta A)(B - \Delta B) + (A + \Delta A)(B + \Delta B)}{2};$$

$$Y = \frac{(A + \Delta A)(B + \Delta B) - (A - \Delta A)(B - \Delta B)}{2}$$

или

$$Y = A \cdot B + \Delta A \cdot \Delta B = AB(1 + \delta_A \cdot \delta_B);$$

$$Y = \Delta A \cdot B + A \cdot \Delta B = AB(\delta_A + \delta_B),$$

где
$$\delta_A = \frac{\Delta A}{A}; \delta_B = \frac{\Delta B}{B}.$$

В общем виде действия с нечеткими числами вы-

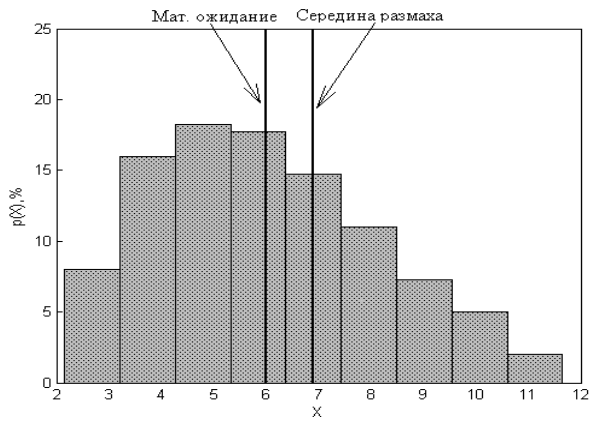


Рис. 1. Гистограмма распределения для случая функциональной зависимости $Y = A \cdot B$

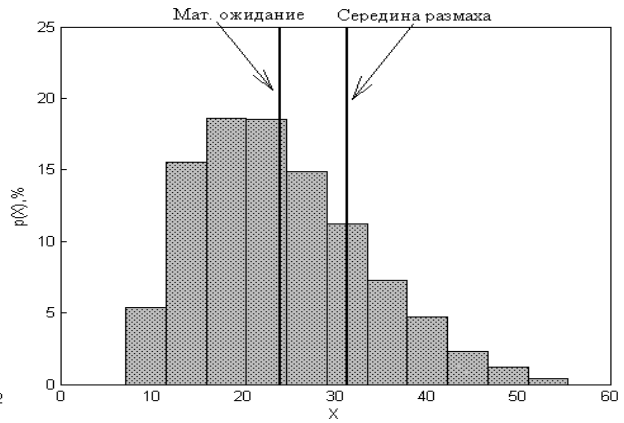


Рис. 2. Гистограмма распределения для случая функциональной зависимости $Y = A \cdot B \cdot C$

глядят следующим образом. Для

$$[Y_l; Y_h] = [x_{1l}; x_{1h}] * [x_{2l}; x_{2h}], \quad (7)$$

где Y_l, Y_h – нижняя и верхняя граница соответственно; * – знак математической операции ($\otimes, \oplus \dots$), границы Y_l и Y_h находят следующим образом:

$$Y_l = \min [x_{1l} * x_{2l}; x_{1l} * x_{2h}; x_{1h} * x_{2l}; x_{1h} * x_{2h}];$$

$$Y_h = \max [x_{1l} * x_{2l}; x_{1l} * x_{2h}; x_{1h} * x_{2l}; x_{1h} * x_{2h}]. \quad (8)$$

Если принять в качестве примера нечеткие числа $A = (1, 2, 3)$ и $B = (2, 3, 4)$, то нечеткое число $A \otimes B = (2, 6, 12)$. Границы несимметричны относительно измеренного значения, что свидетельствует о том, что при разложении в ряд Тейлора нужно учитывать остаточный член. Результат измерения:

$$Y = \frac{2+12}{2} = 7,0; U = \frac{12-2}{2} = 5,0.$$

Представление результата с неопределенностью: $Y = 7 \pm 5$.

Смещение R_1 представляет собой разность между серединой размах $Y = 7$ и математическим ожиданием $M = 6$:

$$R_1 = \Delta_1 \cdot x_2 + \Delta_2 \cdot x_1 = 1/2 \cdot (1^2 + 1^2) = 1.$$

Следует отметить, что интервальный анализ и связанные с ним действия с нечеткими числами дают завышенную оценку неопределенности. Все расчеты выполняются исходя из уровня доверия 1. Для получения расширенной неопределенности с вероятностью меньше 1 необходимы сведения о распределении погрешности в интервале. Эту задачу можно решить, но здесь появляются определенные трудности. Если для рассмотренного выше примера приписать равномерные распределения в границах чисел и решить задачу перемножения методом перебора вариантов, то можно получить гистограмму распределения (рис. 1). В качестве результата измерения используется середина размаха. Математическое ожидание смещено относительно середины размаха.

Распределение несимметричное. Поэтому задачу оценивания расширенной неопределенности с уровнем доверия меньше единицы приходится решать

следующим образом. Задаемся границами расширенной неопределенности. Эти границы соответствуют двум квантилям – $U = \Delta_\alpha, U = \Delta_{1-\beta}$. Таким образом, уровень доверия, который соответствует границам $\pm U$, можно найти как $P = 1 - \alpha - \beta$. Значения квантилей можно найти по распределению, полученному методом перебора вариантов. Например, для $U = 3,7, \alpha = 0,09; \beta = 0,01$.

Следовательно, расширенная неопределенность $\pm 0,37$ соответствует уровню доверия 0,90. При многократном повторении операции умножения несимметричность распределения сохраняется. На рис. 2 приведена гистограмма распределения результата перемножения трех нечетких чисел

$$A \otimes B \otimes C = [1, 3] \otimes [2, 4] \otimes [3, 4].$$

Следует отметить, что операция деления еще более нелинейная по сравнению с умножением. Если, например, взять два нечетких числа $A = (1, 2, 3); B = (2, 3, 4)$, то границы результата деления:

$$A : B = \min \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right] = [0,25; 1,5].$$

Значение Y с расширенной неопределенностью равно $Y = 0,88 \pm 0,63$. Если сравнить полученное значение середины размаха с математическим ожиданием $M[Y] = 0,67$, то для вычисления смещения нужно использовать остаточные члены ряда:

$$R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} \right) \cdot \Delta_A^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial B^2} \right) \cdot \Delta_B^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial B} \right) \cdot \Delta_A \Delta_B =$$

$$= \frac{A}{B^3} \cdot \Delta_B^2 + \frac{1}{B^2} \cdot \Delta_A \Delta_B;$$

$$R_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial A^3} \right) \cdot \Delta_A^3 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial B^3} \right) \cdot \Delta_B^3 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial A^2 \partial B} \right) \cdot \Delta_A^2 \Delta_B +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial A \partial B^2} \right) \cdot \Delta_A \Delta_B^2 = \frac{A}{B^4} \cdot \Delta_B^3 - \frac{1}{3B^2} \cdot \Delta_A \cdot \Delta_B^2.$$

Как уже указывалось раньше, комбинации значений Δ_A и Δ_B подбирают такими, чтобы обеспечить для смещения оценку сверху. В данном случае

$R_2 + R_3 = 0,22$. Для получения расширенной неопределенности с вероятностью меньше единицы опять приписываем равномерные распределения в границах чисел **A** и **B**. Находим распределение частного от деления методом перебора вариантов.

Гистограмма распределения приведена на рис. 3.

Распределение несимметричное. По аналогии с предыдущей операцией найдено, что расширенная неопределенность $U = 0,55$ отвечает уровню доверия $P = 1 - \alpha - \beta = 0,95$, где $\alpha = 0,045$, $\beta = 0,005$. Расширенная неопределенность $U = 0,51$ отвечает уровню доверия $P = 0,9$ при $\alpha = 0,0925$, $\beta = 0,0075$.

В работах [8, 9] по использованию нечетких чисел для оценивания результата и расширенной неопределенности предложена следующая форма нечеткого числа (рис. 4).

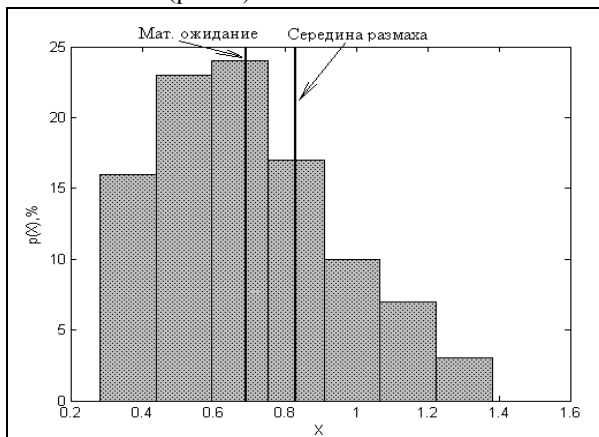


Рис. 3. Гистограмма распределения для случая функциональной зависимости $Y = A/B$

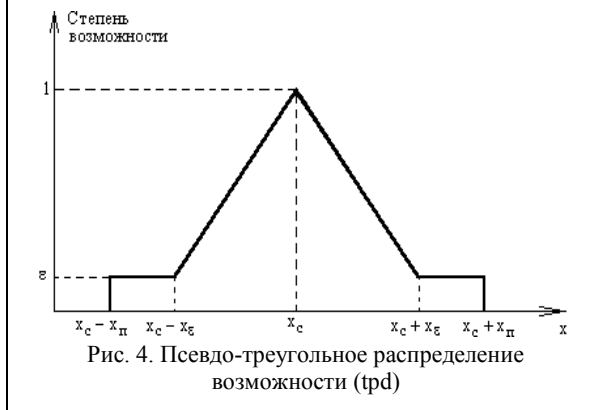


Рис. 4. Псевдо-треугольное распределение возможности (tpd)

С помощью псевдо-треугольного распределения возможности представляются нечеткие числа с разными формами распределений. Например, для треугольного распределения $x_c = x_m$ (мода распределения); $x_n + x_c = x_m + 2,45\sigma$; $\varepsilon = 0,11$; $x_n + x_c = x_m + 1,63\sigma$. Для нормального усеченного ($P = 0,99$): $x_c = x_m$; $x_n + x_c = x_m + 2,58\sigma$; $\varepsilon = 0,12$; $x_n + x_c = x_m + 1,54\sigma$. Представление арифметических операций имеет вид:

$$\text{tpd}_Y = \text{tpd}_1 \circ \text{tpd}_2;$$

$$\varepsilon_Y = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

где \circ – одна из арифметических операций. Исходя из того, что распределения становятся несимметричны-

ми (это было показано выше), форма каждого из нечетких чисел представляется следующим образом:

$$\text{tpd}_1(m_1, \varepsilon_1, \underline{x}_{\varepsilon_1}, \bar{x}_{\varepsilon_1}, \underline{x}_{\Pi 1}, \bar{x}_{\Pi 1});$$

$$\text{tpd}_2(m_2, \varepsilon_2, \underline{x}_{\varepsilon_2}, \bar{x}_{\varepsilon_2}, \underline{x}_{\Pi 2}, \bar{x}_{\Pi 2}).$$

Результирующее нечеткое число представляется так:

$$\text{tpd}_Y(m_Y, \varepsilon_Y, \underline{x}_{\varepsilon_Y}, \bar{x}_{\varepsilon_Y}, \underline{x}_{\Pi Y}, \bar{x}_{\Pi Y}).$$

Форма нечеткого числа приведена на рис. 5.

Формулы для получения границ расширенной неопределенности с уровнем доверия 1 приведены для положительных нечетких чисел в табл. 1.

Если вернуться к представленному выше примеру произведения двух чисел **A** = (1, 2, 3); **B** = (2, 3, 4), то в обозначениях табл. 1:

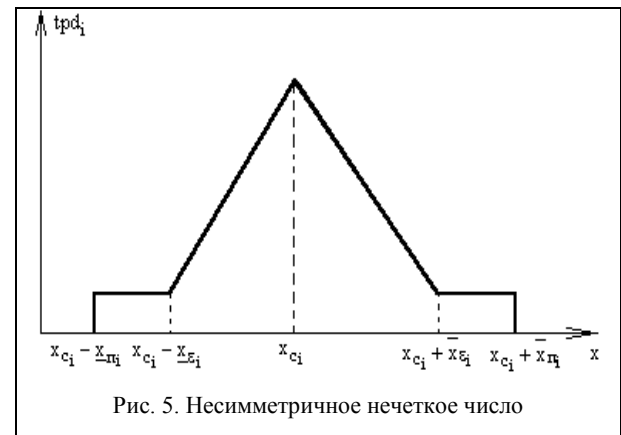


Рис. 5. Несимметричное нечеткое число

Таблица 1

Формулы для расчета границ

Границы результата Операция	$\underline{x}_{\Pi Y}$	$\bar{x}_{\Pi Y}$
	Сложение	$\underline{x}_{\Pi 1} + \underline{x}_{\Pi 2}$
Вычитание	$\underline{x}_{\Pi 1} + \bar{x}_{\Pi 2}$	$\bar{x}_{\Pi 1} + \underline{x}_{\Pi 2}$
Умножение	$\underline{x}_{\Pi 1} m_2 + \underline{x}_{\Pi 2} m_1 - \underline{x}_{\Pi 1} \underline{x}_{\Pi 2}$	$\bar{x}_{\Pi 1} m_2 + \bar{x}_{\Pi 2} m_1 - \bar{x}_{\Pi 1} \bar{x}_{\Pi 2}$
Деление	$\frac{m_1}{m_2} - \frac{(m_1 - \bar{x}_{\Pi 1})}{(m_2 + \underline{x}_{\Pi 2})}$	$\frac{(m_1 + \bar{x}_{\Pi 1})}{(m_2 - \underline{x}_{\Pi 2})} - \frac{m_1}{m_2}$

$$\underline{x}_{\Pi 1} = \bar{x}_{\Pi 1} = 1; \underline{x}_{\Pi 2} = \bar{x}_{\Pi 2} = 1; m_1 = 2, m_2 = 3.$$

Тогда границы соответственно равны:

$$\underline{x}_{\Pi Y} = 4; \bar{x}_{\Pi Y} = 6.$$

Нижняя и верхняя границы результата косвенного измерения соответственно равны:

$$x_{CY} - \underline{x}_{\Pi Y} = 6 - 4 = 2; x_{CY} + \bar{x}_{\Pi Y} = 6 + 6 = 12.$$

Результат измерения с неопределенностью $Y = 7 \pm 5$ (такой же, как и полученный ранее).

При делении **A**:**B** границы соответственно равны:

Формулы для расчета границ

Границы результата	$\underline{x}_{\varepsilon_Y}$	\bar{x}_{ε_Y}
Операция		
Сложение	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{\underline{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} + \frac{\underline{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2} \right]$	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{\bar{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} + \frac{\bar{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2} \right]$
Вычитание	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{\underline{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} + \frac{\bar{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2} \right]$	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{\bar{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} + \frac{\underline{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2} \right]$
Умножение	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{m_1 \cdot \underline{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2} + \frac{m_2 \cdot \underline{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} - \frac{\underline{x}_{\varepsilon_1} \cdot \underline{x}_{\varepsilon_2}}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \right]$	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{m_1 \cdot \bar{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2} + \frac{m_2 \cdot \bar{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} - \frac{\bar{x}_{\varepsilon_1} \cdot \bar{x}_{\varepsilon_2}}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \right]$
Деление	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{m_1 - \frac{\underline{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1}}{m_2 - \frac{\underline{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2}} \right]$	$(1-\varepsilon_Y) \left[\frac{m_1 + \frac{\bar{x}_{\varepsilon_1}}{1-\varepsilon_1} - m_1}{m_2 - \frac{\underline{x}_{\varepsilon_2}}{1-\varepsilon_2}} \right]$

$\underline{x}_{\text{ПУ}} = 0,67 - 0,25 = 0,42; \bar{x}_{\text{ПУ}} = 1,50 - 0,67 = 0,83.$

А нижняя и верхняя границы результата косвенного измерения соответственно равны 0,25 и 1,50 (такой же результат был получен раньше).

Для получения расширенной неопределенности с уровнем доверия меньше 1 в работе [8] рекомендуют использовать следующие соотношения (табл. 2).

Сравнение результатов оценивания расширенной неопределенности при уровне доверия меньше единицы, полученных:

1) с помощью операций над нечеткими числами в виде границ интервалов доверия и с оцениванием распределения методом перебора вариантов;

2) с помощью нечетких чисел типа trp, показало следующее:

– при сравнении численных примеров для умножения расширенные неопределенности равны:

1. $U(P = 0,90) = 0,37;$ 2. $U(P = 0,90) = 0,45.$

– то же для деления:

1. $U(P = 0,90) = 0,54;$ 2. $U(P = 0,90) = 0,56.$

Это подтверждает основные положения, выдвинутые авторами [8, 9] при разработке правил, основанных на trp:

«включаемость» – полученные доверительные интервалы должны включать точные доверительные интервалы;

«простота» – для распространения неопределенностей должны быть использованы простые правила.

Таким образом, при расчетах неопределенности косвенного измерения с уровнем доверия 1 и меньше 1 при невозможности линеаризации уравнения погрешности можно использовать аппарат нечетких чисел, предложенный в [8, 9]. Ограничения применения видны из проведенного анализа и подчерки-

ваются авторами разработки. Результаты неудовлетворительны, если распределения несимметричны. Как отмечают авторы [8, 9], это имеет место при малом количестве операций (например одно деление или умножение). Тогда аппроксимация нечеткими числами trp является плохой. Однако проведенные нами исследования показали, что несимметричность не уменьшалась с увеличением количества операций. Поэтому наша рекомендация и рекомендация авторов [8, 9] – в ответственных случаях производить оценивание распределений.

Вывод. При невозможности линеаризации уравнения погрешности косвенного измерения для ориентировочных расчетов расширенной неопределенности с уровнем доверия меньше единицы могут быть использованы нечеткие числа типа trp. Для точных расчетов требуется проводить более глубокое исследование, основанное на нечетких числах в виде интервала доверия с оцениванием результирующего распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шокін Ю.І. Інтервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981. – 334 с.
2. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с.
3. Ціделко В.Д., Яремчук Н.А. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результату вимірювання. – К.: ІВЦ Видавництво „Політехніка”, 2002. – 176 с.
4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 с.
5. Змитрович А.И. Интеллектуальные информационные системы. – Мн.: НТООО „Тетра Системс”, 1997. – 368 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 479 с.
7. Кудряшова Ж.Ф., Рабинович С.Г. Методы обработ-

ки результатов наблюдений при косвенных измерений // Сб. „Методы обработки результатов наблюдений при измерениях”. Труды метрологических институтов СССР. – Л.: Энергия”, 1975. – Вып. 172 (232). – 72 с.

8. *Mauris G., Berrah L., Foulloy L., Haurat A.* Fuzzy handling of measurement errors in instrumentation // IEEE Transaction and measurement. – 2000. – V.49, W1.

9. *Mauris G., Lassere F., Foulloy L.* Fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement. – Measurement, 2001. – № 29. – P. 224-229.

Поступила 14.03.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.