

УДК 537.874.74

Е.В. Хоменко<sup>1</sup>, В.Е. Новиков<sup>2</sup><sup>1</sup>Фирма «РАДМИР» ДП АО НИИ радиоизмерений, Харьков<sup>2</sup>Институт электрофизики и радиационных технологий НАНУ, Харьков

## ЭВОЛЮЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕНТГЕНОВСКИХ КВАНТОВ ПО ЭНЕРГИЯМ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИХ ПОТОКА В ВЕЩЕСТВЕ

При описании немарковских процессов ослабления потока рентгеновских квантов в веществе необходимо учитывать эволюцию распределения квантов по энергиям по мере распространения их потока по веществу. В работе рассмотрено кинетическое уравнение для распределения квантов по энергиям и получены его численно-аналитические решения. С учетом этих решений уточнена математическая модель процессов ослабления потока рентгеновских квантов.

*эволюция распределения, рентгеновские кванты, поток, вещество*

### Введение

В медицине и технике в настоящее время все более широкое применение находят цифровые рентгенографические системы. Для успешного их проектирования необходима разработка математической модели канала распространения и регистрации рентгеновского излучения. В корректной математической модели должно учитываться изменение энергии рентгеновских квантов при их распространении по исследуемому объекту.

Задачей настоящей статьи является исследование изменений функции распределения рентгеновских квантов, порождаемых монохроматическим источником, при их взаимодействии с веществом в условиях комптоновского рассеяния.

Впервые кинетическое уравнение в дифференциальной форме для квантовых систем было получено Компанейцем [1] для фотонного газа, взаимодействующего с электронным газом. В этой работе уравнение Компанейца использовалось для исследования особенностей установления термодинамического равновесия в разреженной плазме, однако его применение не ограничивается плазмой и может быть распространено на разнообразные физические объекты.

Рассмотрим кинетическое уравнение для функции распределения рентгеновских квантов  $f(v)$  в зависимости от частоты  $v$ , описывающее рассеяние фотонов на электронах с температурой  $T$  в классическом приближении без учета бозе-факторов  $(1+f)$ :

$$\frac{\partial f(v)}{\partial \tau} = -f(v)A \int K(v, v')v'^2 dv' + A \int K(v', v)f(v')dv' \equiv$$

$$\equiv -f(v) + A \int K(v', v)f(v')dv', \quad (1)$$

где  $A$  – константа, связанная с интенсивностью электромагнитного взаимодействия;  $K(v, v')$  – ядро интегрального уравнения, определяющее вероятность рассеяния квантов с частотой  $v$  на электронах в кванты с частотой  $v'$ .

Очевидно, что с учетом индуцированного рассеяния уравнение модифицируется таким образом:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial \tau} = -f(v)A \int K(v', v)[1+f(v')]dv' +$$

$$+ [1+f(v)]A \int K(v', v)f(v')dv' = \quad (2)$$

$$= -f(v) + A \int K(v', v)f(v')dv' + f(v')v'^2 dv' +$$

$$+ f(v)A \int [K(v', v) - K(v, v')]f(v')v'^2 dv'.$$

Формулы содержат предельный случай рассеяния без изменения частоты:

$$K(v', v) = \frac{\delta(v-v')}{Av^2}.$$

В этом случае выполняется равенство  $\partial f(v)/\partial \tau = 0$ . Индуцированный член обращается в нуль не только для ядра  $K$  (пропорционального  $\delta$ -функции), но и для любого симметричного ядра  $K_s(v, v') = K_s(v', v)$ .

Функция  $K(v, v', T)$  довольно сложна; выписать ее в приближенном виде, сохранив все принципиально важные общие свойства, нелегко. Малость изменения частоты при рассеянии означает, что  $K$  мало отличается от  $\delta$ -функции. Но для эволюции спектра существенно именно это малое отличие. При рассеянии фотонов на электронах с нулевой температурой  $T=0$  возможно лишь уменьшение частоты (при том не более чем на величину  $\Delta v_m = 2hv^2/mc^2$ ). Значит,  $K_0(v, v')$  отлично от нуля лишь в интервале  $0 \leq v-v' \leq \Delta v_m$  (индекс 0 при  $K$  означает  $T=0$ ).

При конечной температуре электронов  $T$  добавляется доплер-эффект, зависящий от движения электронов. Соответствующая функция  $K_T(v, v')$  имеет приблизительно гауссовский вид  $\sim \exp[-(v-v')^2/2\Delta^2]$ , причем характерная ширина ядра по частоте  $\Delta \sim \sqrt{v^2/c^2} \sim \sqrt{kT/mc^2}$ . Полная

функция  $K(v, v', T)$  не будет ни суммой, ни произведением  $K_0$  и  $K_T$ .

Поскольку частота при каждом рассеянии меняется мало, естественно ожидать, что  $\partial f(v)/\partial \tau$  окажется зависящим лишь от значений  $f(v')$  в соседних участках спектра при  $|v' - v| \ll v$ . Следовательно, можно будет выразить интеграл столкновений  $I_{st} \equiv \partial f(v)/\partial \tau$  в зависимости от функции распределения (числа заполнения) и ее производных при том же значении  $v$ . Условием является гладкость функции  $f(v)$ : необходимо, чтобы по порядку величины выполнялись соотношения

$$f \sim v \partial f / \partial v \sim v^2 \partial^2 f / \partial v^2.$$

Математически переход от точного интегрального к дифференциальному уравнению для  $\partial f / \partial \tau$  совершается по формулам:

$$A \int K(v, v') f(v') v'^2 dv' = a_0 f(v) + a_1 \frac{\partial f}{\partial v} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \dots, \quad (3)$$

$$a_0 = A \int K(v, v') v'^2 dv'; \quad a_1 = A \int K(v, v') (v' - v) v'^2 dv';$$

$$a_2 = \frac{A}{2} \int K(v, v') (v' - v)^2 v'^2 dv'.$$

Однако ясные физические требования к уравнению настолько ограничивают выбор параметров, что уравнение можно получить, не выписывая явно громоздкое  $K(v, v', T)$  [2]. В случае малых чисел заполнения, членами  $f^2$  в (3) можно пренебречь. Коэффициент  $a_1$  есть (взятое со знаком плюс) среднее уменьшение частоты при однократном рассеянии; при рассеянии на угол  $\theta$  оно равно  $\Delta v = \Delta v_m (1 - \cos \theta) / 2$ , т.е.  $a_1 = \overline{\Delta v} = \overline{h v^2} / m c^2$ . Коэффициент  $a_2$  равен среднему квадрату изменения частоты. В данном случае

$$a_2 = \overline{(\Delta v)^2} \sim (\overline{\Delta v})^2 \sim \left( \frac{h v}{m c^2} \right)^2 v^2 \ll v \overline{\Delta v}.$$

Поэтому коэффициентами  $a_2$  можно пренебречь. Итак, остается уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = (a_0 - 1) f + \frac{h v^2}{m c^2} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (4)$$

Используем сохранение плотности частиц при рассеянии. Кинетическое уравнение должно удовлетворять условию

$$\frac{dN}{d\tau} = A \frac{d}{d\tau} \int f v^2 dv = A \int \frac{\partial f}{\partial \tau} v^2 dv \equiv 0. \quad (5)$$

Для того чтобы это соотношение выполнялось при любом  $f(v)$  нужно, чтобы правая часть уравнения (4) имела вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \Pi \left( v, f, \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (6)$$

Дивергентная форма уравнения обеспечивает закон сохранения:  $\Pi$  – поток рентгеновских квантов

через сферическую поверхность в фазовом пространстве, соответствующую данной частоте  $v$ . Сопоставляя с тем, что уже известно из уравнения (1), получим

$$\Pi = R(v) f; \quad \frac{1}{v^2} R(v) \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{h v^2}{m c^2} \frac{\partial f}{\partial v};$$

$$R = \frac{h v^2}{m c^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{h}{m c^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 f. \quad (7)$$

Мы видим, что удовлетворение общих требований законов сохранения позволило обойти трудное вычисление  $a_0$  по функции  $K_0(v, v')$ . Обратимся к квадратичному члену, описывающему индуцированное рассеяние. Из интегрального уравнения следует:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\text{инд}} = b_0 f^2 + b_1 f \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (8)$$

где  $b_0$  и  $b_1$  – функции  $v$ , далее  $b_1 = \frac{2 h v^2}{m c^2} = 2 a_1$ .

Применяя принцип дивергенции получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{h}{m c^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( v^4 (f + f^2) \right). \quad (9)$$

Уравнение (9) с учетом температуры должно удовлетворять термодинамическому принципу: равновесное Планковское распределение квантов при взаимодействии с частицами той же температуры, но много большей массы не должно изменяться. Это означает, что  $\partial f / \partial \tau \equiv 0$  при  $f = (e^{h v / k T} - 1)^{-1}$ . Вместе с принципом сохранения бозонов термодинамический принцип без вычислений фиксирует множитель при  $\partial^2 f / \partial v^2$  и остальные члены, пропорциональные температуре. Уравнение Компанейца приобретает окончательный вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{v_0 h}{m c^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 \left( \frac{T}{h} \frac{\partial f}{\partial v} + f + f^2 \right), \quad (10)$$

где  $v_0 = \sigma_T n_e c$ .

Удобно вместо частоты ввести безразмерную энергию бозона  $x = \frac{h v}{m c^2}$ , а также безразмерное

время  $t = \tau v_0$ ,  $\alpha = \frac{T}{m c^2}$ , тогда в новых переменных

уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right) \right) + \psi(x). \quad (11)$$

Здесь добавлено слагаемое  $\psi(x)$ , которое представляет источники и стоки квантов в системе. В частности будем предполагать, что источники и стоки локализованы вблизи определенных частот, т.е. источник и сток в этом случае монохроматические.

Как видно, при получении этого уравнения нигде не указывался характер взаимодействия, требовались лишь статистические свойства системы. Это и позволяет применять данное уравнение не только по

отношению к рассеиванию рентгеновских квантов на электронах, но и к любой системе бозонов, претерпевающих столкновение на системе более массивных частиц.

Далее нас будет интересовать стационарное неравновесное решение кинетического уравнения, обращающее в нуль интеграл столкновений. Это решение может реализоваться в области частот между источником и стоком, т.е.  $v_i < v < v_s$  ( $v_{i,s}$  – характерные частоты источника и стока, соответственно).

### Исследование кинетики рентгеновских квантов

Стационарная функция распределения рентгеновских квантов по частоте определяется в нашем случае из уравнения

$$x^4 \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right) = \int_0^x x'^2 \Psi(x') dx'. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) определяет неравновесное распределение с постоянным потоком числа частиц в энергетическом пространстве. Связь стационарных распределений с постоянством потока имеет прямые аналогии с колмогоровской идеологией турбулентности, как указано впервые в работах [3 – 4].

Возможный механизм отклонения от колмогоровской идеологии можно увидеть уже в уравнении (10). Действительно, поток частиц содержит слагаемые с разной степенью однородности. Это приводит к отсутствию чисто степенных распределений. Стационарное решение исследовано с помощью квазиклассического метода ВКБ [5].

Покажем, что эти распределения действительно образуются при монохроматическом источнике. Рассмотрим численные решения этого уравнения для случая источника фотонов, локализованного в пространстве частот.

Стоком для фотонов в данном случае являются тормозные процессы, происходящие при взаимодействии фотонов с электронами в основном на частотах меньших, чем  $\alpha$ . Эти процессы можно описать простым слагаемым в правой части кинетического уравнения (дополнительное слагаемое  $\Psi(x)$  в уравнении Компанейца (11)):

$$\Psi(x) = K_{ff} \frac{x}{v_0 \alpha} c g_e(x) \left[ 1 / \left( \exp\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1 \right) - f(t, x) \right], \quad (13)$$

здесь введен фактор Гаунта

$$g_e(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \alpha; \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \text{Log} \frac{2,35 \alpha}{x}, & x < \alpha. \end{cases}$$

Это слагаемое обеспечивает релаксацию к равновесной функции распределения фотонов в области низких частот и иногда его можно приближенно учитывать граничным условием

$$f(t, x_0) = 1 / \left( \exp(x / \alpha) - 1 \right).$$

Для численного решения удобно ввести новую функцию  $g = fx^2$ . Для новой функции  $g(t, x)$  уравнение (12) имеет вид уравнения с дивергенцией потока и правой частью (источником)  $D(x) = x^2 \Psi(x)$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha x^2 \frac{\partial g}{\partial x} + (x^2 - 2\alpha x)g + g^2 \right) + D(x), \quad (14)$$

или вид уравнения Бюргера (после раскрытия производной) с неоднородными коэффициентами.

Поверхность, представляющая численное решение кинетического уравнения с источником фотонов и их стоком в области низких энергий изображена на рис. 1.

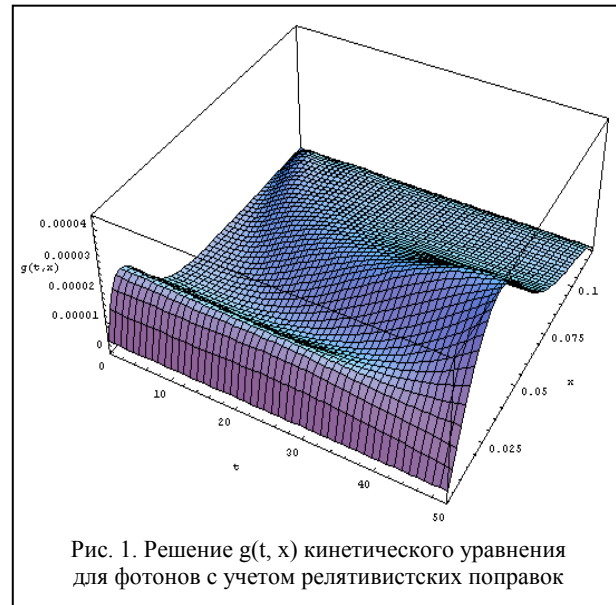


Рис. 1. Решение  $g(t, x)$  кинетического уравнения для фотонов с учетом релятивистских поправок

На рисунке видна траектория распространения возмущений от источника, сосредоточенного в конце интервала частот, к стационарному положению максимума распределения, разделяющего участки с различными степенными распределениями. Для определения областей с квазистепенными участками функции распределения изобразим функцию распределения, являющуюся конечной стадией эволюции, в двойном логарифмическом масштабе на рис. 2.

Видны два участка со степенной зависимостью, образовавшиеся в конце эволюции. Зная эволюцию функции распределения, можно вычислить зависимость эффективной температуры фотонного газа  $T_{ph}(t)$  от времени

$$\frac{T_{ph}(t)}{m_e c^2} = \frac{1}{4} \int_0^\infty f(t, x) (1 + f(t, x)) x^4 dx / \int_0^\infty f(t, x) x^3 dx. \quad (15)$$

График зависимости  $T_{ph}(t) / (m_e c^2)$  от времени приведен на рис. 3, из которого видно, что значение температуры вышло на предельное значение в конце эволюции системы. Эволюция происходит таким образом, что формируются области в фазовом прос-

транстве с поток частиц не зависящим от частоты. Образование таких областей хорошо видно на рис. 4.

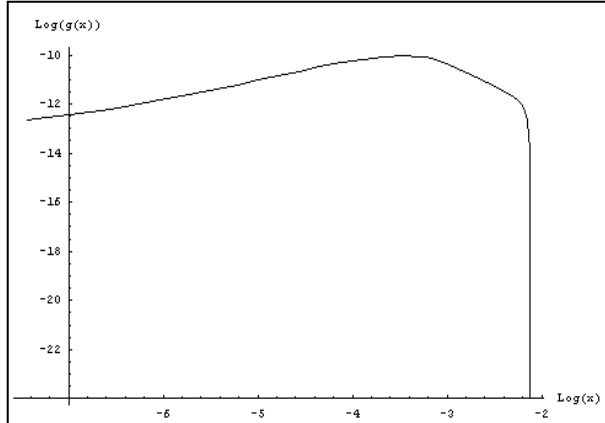


Рис. 2. Решение  $g(t_{\max}, x)$  кинетического уравнения для фотонов в конце временной эволюции в двойном логарифмическом масштабе

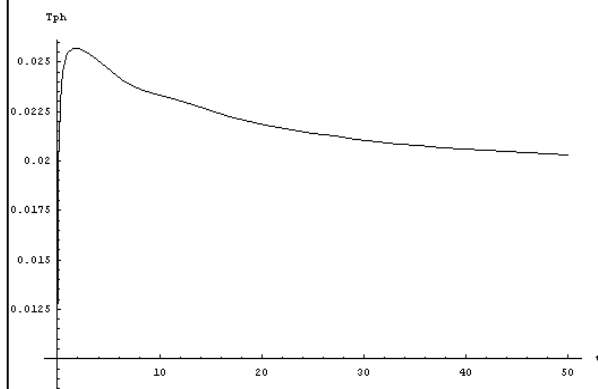


Рис. 3. Зависимость температуры фотонного газа от времени

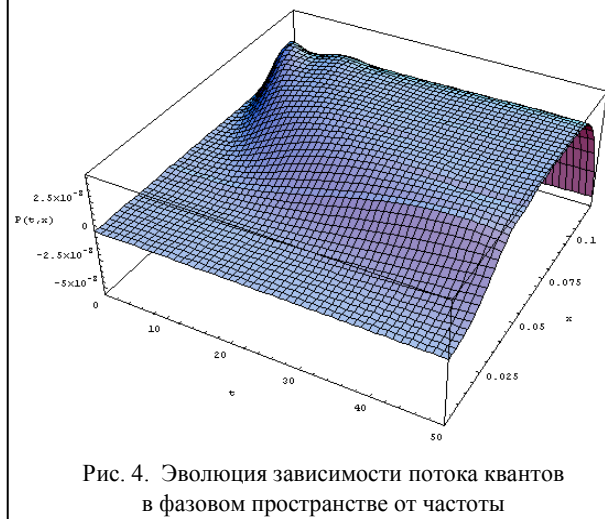


Рис. 4. Эволюция зависимости потока квантов в фазовом пространстве от частоты

Из рис. 3 видно, что значение температуры вышло на предельное значение в конце эволюции системы. Эволюция происходит таким образом, что формируются области в фазовом пространстве с поток частиц не зависящим от частоты. Образование таких областей хорошо видно на рис. 4.

Мы численно получили вид стационарной функции распределения квантов по частоте (энергии).

Однако для качественного анализа структуры вещества по рассеянию квантов полезны были бы общие соотношения для макроскопических характеристик потока квантов и среды, т.е. термодинамические соотношения в неравновесной системе квантов и вещества (электронов).

Равновесные термодинамические соотношения при этом не годятся и необходимы элементы неравновесной термодинамики. Очень интересная попытка построения феноменологической теории проделана в работах Тсаллиса [6] для случая классической статистики. В работе [7] приведено некоторое обобщение этой теории на квантовый случай для фермионов. Представляется своевременным сделать обобщение неравновесных термодинамических соотношений для рассматриваемого в настоящей статье случая.

Термодинамика Тсаллиса, была построена им для расширения области применимости термодинамики и статистической механики на системы, в которых энтропия не обладает свойством экстенсивности [6]. Формализм Тсаллиса состоит в формальной замене в соотношениях статистики и термодинамики экспоненциальных и логарифмических функций на их обобщения, выраженные через степенные функции:

$$\ln(x) \rightarrow \ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q};$$

$$\exp(x) \rightarrow \exp_q(x) = (1 + (1-q)x)^{1/(1-q)}, \quad (16)$$

с неким числовым параметром  $q$ . Заметим, что при  $q$ , стремящемся к 1, введенные в (16) функции переходят в обычные логарифм и экспоненту.

На основе степенеподобных функций (16) и предложена новая форма энтропии [6] для негиббсовских распределений в термодинамике систем, для которых по разным причинам нарушается экстенсивность энтропии и бальцмановская термодинамика. Новая формула для энтропии выглядит так:

$$S_q = -\sum_i p_i^q \ln_q(p_i) = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q-1}. \quad (17)$$

Если  $q \rightarrow 1$ , то новая  $q$ -энтропия переходит в стандартную бальцмановскую форму. Главное свойство введенной таким образом энтропии заключается в том, что она уже не является экстенсивной функцией. Можно показать, что если всю систему разбить на две независимые подсистемы А и В, то

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B). \quad (18)$$

Из соотношения (18) видно, что параметр  $q$  – это мера неэкстенсивности системы.

Воспользовавшись приведенными выше численными решениями кинетического уравнения Компанейца с монохроматическим источником можно показать, что в результате эволюции образуется функция распределения фотонов, которое можно

представить в аналитической форме, выражающейся через квазистепенную функцию  $\exp_q(x)$

$$f_q(\varepsilon) = 1 / (\exp_q((\varepsilon - \mu)/T) - 1). \quad (19)$$

Это решение является обобщением функции Планка с химическим потенциалом  $\mu$  на неравновесный случай, а ее параметры зависят от значения потока квантов в фазовом пространстве.

### Заключение

Таким образом, в работе изучена эволюция функции распределения рентгеновских квантов, порождаемых монохроматическим источником при взаимодействии с веществом в условиях комптоновского рассеяния. Показано, что в этом случае, квазистационарные распределения рентгеновских квантов по энергии определяются интенсивностью источника и могут быть представлены в виде функции Планка с заменой экспоненты на ее степенеподобное неэкстенсивное обобщение введенное Тсалисом.

### Список литературы

1. Компанец А. // ЖЭТФ. – 1956. – 31. – С. 876.
2. Зельдович Я.Б. // УФН, 115, Вып. 2, 161, 1975.
3. Кац А.В., Конторович В.М., Моисеев С.С., Новиков В.Е. // Письма в ЖЭТФ, 21, Вып. 1, 13, 1975.
4. Кац А.В., Конторович В.М., Моисеев С.С., Новиков В.Е. // ЖЭТФ, 71, 1777, 1976.
5. Моисеев С.С., Новиков В.Е., Тур А.В., Яновский В.В. // ЖЭТФ, 86, Вып. 3, 920, 1984.
6. Tsallis C., *Physica A*. // *Nonextensive thermostatics: brief review and comments*. – 1995. – V. 221. – P. 277-290.
7. Неравновесные функции распределения электронов в плазме полупроводника, облучаемого быстрыми ионами / С.И. Кононенко, В.И. Карась, В.Е. Новиков, Р.З. Сагдеев и др. // *Физика Плазмы*. – 2004. – Вып. 8, т. 30. – С. 1-17.

Поступила в редакцию 21.07.2006

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.И. Карпенко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.