

УДК 514.753

Т.Е. Романова¹, С.Б. Шеховцов²¹Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины²Харьковский национальный университет внутренних дел**Ф-ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ПОКРЫТИЯ**

На основе применения метода Ф-функций строятся математические модели оптимизационных задач покрытия выпуклых ограниченных замкнутых двумерных областей конгруэнтными выпуклыми ограниченными замкнутыми двумерными объектами. В качестве примера приводится аналитический вид Ф-функций, необходимых для построения реализаций приведенных математических моделей для задачи покрытия базовой области (круг, прямоугольник, правильный многоугольник, выпуклый многоугольник) кругами заданного радиуса.

Ф-функция, задачи покрытия**Введение**

Задачи покрытия возникают в различных сферах человеческой деятельности, областях науки и техники, в том числе: в телекоммуникациях (для мобильной связи), в системах орошения, пожарной безопасности, в военных сценариях, системах воздушного и космического наблюдения, медицине и многих других приложениях. Достаточно полный обзор и классификация задач покрытия приведена в статье [1].

Рассмотрим задачу покрытия в следующей постановке.

Пусть имеется выпуклое компактное множество $T_0 \subset R^2$ и семейство конгруэнтных выпуклых компактных множеств T_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (в дальнейшем, объектов).

Необходимо покрыть множество объектами из семейства $\{T_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ таким образом, чтобы заданная функция цели достигала своего экстремума.

Задачи покрытия относятся к классу задач геометрического проектирования [2]. Наименее изученными являются задачи нерегулярного покрытия,

для решения которых, как правило, используют эвристические подходы [1].

В монографии [2] предложен подход к решению задач покрытия, моделирование которых основано на использовании аппарата ω -функций. Однако, для вычисления значений ω -функции требуются трудоемкие вычисления площадей, так называемых, составных объектов, которые в общем случае являются пересечениями и объединениями множеств T_i и T_0 и замыканий их дополнений до всего пространства R^2 .

Дальнейшее развитие этого направления требует создания современных конструктивных средств аналитического описания условий покрытия заданной области геометрическими объектами с целью построения математических моделей и разработки эффективных методов решения задач обозначенного класса.

Целью данной публикации является построение математической модели поставленной задачи на основе использования метода Ф-функций [3 – 5].

С теоретико-множественной точки зрения значения Ф-функции "различают" следующие ситуа-

ции: а) объекты T_1 и T_2 пересекаются, т.е. $\text{int } T_1 \cap \text{int } T_2 \neq \emptyset$; б) объекты $T_1 = \text{cl} T_1$ и $T_2 = \text{cl} T_2$ не имеют общих точек, т.е. $T_1 \cap T_2 = \emptyset$; в) объекты T_1 и T_2 касаются, т.е. $\text{fr} T_1 \cap \text{fr} T_2 \neq \emptyset$ и $\text{int } T_1 \cap \text{int } T_2 = \emptyset$, здесь $\text{cl} T$, $\text{int } T$, $\text{fr} T$ – замыкание, внутренность, граница множества T соответственно.

Очевидно, что Φ -функция зависит от взаимного положения объектов T_1 и T_2 , при этом значения этой функции дают численную оценку ситуаций а), б) и в). Кроме того, значения этой функции в случае а) являются "мерой" пересечения T_1 и T_2 , а в случае б) либо равно $\rho^*(x_1, x_2) = \min_{x_1 \in T_1, x_2 \in T_2} \|x_1 - x_2\|$, либо являются некоторой оценкой $\rho^*(x_1, x_2)$, где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве R^2 .

Следует заметить, что допускаются только собственные конгруэнтные преобразования объектов.

Объект T_i , заданный в собственной системе координат и транслированный на вектор u_i , обозначается как $T_i(u_i)$, $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$.

Аналитический вид Φ -функций естественным образом зависит от пространственной формы объектов. В статье [5] приведены способы построения Φ -функций допустимых пар объектов из набора $\zeta = \{C, R, H, K, C^*, R^*, H^*, K^*\}$, где C – круг, R – прямоугольник, H – правильный многоугольник, K – выпуклый многоугольник, $C^* = \text{cl}(R^2 \setminus C)$, $R^* = \text{cl}(R^2 \setminus R)$, $H^* = \text{cl}(R^2 \setminus H)$, $K^* = \text{cl}(R^2 \setminus K)$. В данном исследовании в качестве пространственных форм объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$ рассматриваются только перечисленные выше односвязные объекты, т.е. $T_0(u_0) \in \{C, R, H, K\}$, $T_i(u_i) \in \{C, R, H, K\}$.

Обозначим Φ -функции объектов, необходимые для построения математических моделей задач покрытия множества $T_0(u_0)$ конгруэнтными объектами $T_i(u_i)$ следующим образом:

1) $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \in \{\Phi_{CC}(u_1, u_2), \Phi_{RR}(u_1, u_2), \Phi_{HH}(u_1, u_2), \Phi_{KK}(u_1, u_2)\}$ – нормализованная Φ -функция объектов и $T_i(u_i)$;

2) $\Phi_{0i}(u_0, u_i) \in \{\Phi_{C^*C}(u_1, u_2), \Phi_{R^*C}(u_1, u_2), \Phi_{H^*C}(u_1, u_2), \Phi_{K^*C}(u_1, u_2), \Phi_{C^*R}(u_1, u_2), \Phi_{R^*R}(u_1, u_2), \Phi_{H^*R}(u_1, u_2), \Phi_{K^*R}(u_1, u_2), \Phi_{C^*H}(u_1, u_2), \Phi_{R^*H}(u_1, u_2), \Phi_{H^*H}(u_1, u_2), \Phi_{K^*H}(u_1, u_2), \Phi_{C^*K}(u_1, u_2), \Phi_{R^*K}(u_1, u_2), \Phi_{H^*K}(u_1, u_2), \Phi_{K^*K}(u_1, u_2)\}$

$\Phi_{H^*K}(u_1, u_2), \Phi_{K^*K}(u_1, u_2)\}$ – нормализованная Φ -функция объектов $T_0^*(u_0) \in \{C^*, R^*, H^*, K^*\}$ и $T_i(u_i)$;

3) $\Phi_{0i}(u_0, u_i) \in \{\Phi_{RC}(u_1, u_2), \Phi_{HC}(u_1, u_2), \Phi_{KC}(u_1, u_2), \Phi_{KH}(u_1, u_2), \Phi_{KR}(u_1, u_2), \Phi_{HR}(u_1, u_2)\}$ – нормализованная Φ -функция объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$;

4) $\Phi(u_0, u_T) = \min \Phi_{0l}(u_0, u_l), l = 1, 2, \dots, k$ –

Φ -функция объектов $T(u_T) = \bigcup_{l=1}^k T_l(u_l)$ и $T_0(u_0)$,

$\bigcup_{l=1}^k T_l(u_l) = \text{cl}(R^2 \setminus \bigcap_{i=1}^m T_i(u_i))$, $T_l(u_l)$ – выпуклое

замкнутое подмножество пространства R^2 , $\Phi_{0l}(u_0, u_l)$ – Φ -функция объектов $T_0(u_0)$ и $T_l(u_l)$.

Рассмотрим математические модели поставленной задачи с функциями цели:

- а) количество покрывающих объектов;
- б) оценка суммарной площади перекрытий покрывающих объектов.

Задача 1.

$$\min_{u \in D \subset R^{2n}} \chi(u) = \min_{u \in D \subset R^{2n}} \sum_{i=1}^n \sigma_i(u_i), \quad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$;

$$\sigma_i(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d > 0; \\ 0, & \text{если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d \leq 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$D = \{u \in R^{2n} \mid \Phi(u_0, u_T) \geq 0\}; \quad (3)$$

$\Phi(u_0, u_T)$ – Φ -функция объектов

$$T(u_T) = \text{cl} \left(R^2 \setminus \bigcap_{i=1}^n (\sigma_i(u_i) \cdot T_i(u_i)) \right) \text{ и } T_0(u_0);$$

$$d = \min_{(u_0, u_i) \in \tilde{\gamma}_{0i}} \Phi_{0i}(u_0, u_i);$$

$$\tilde{\gamma}_{0i} = \{(u_0, u_i) \in R^4 \mid \tilde{\Phi}_{0i}(u_0, u_i) = 0\}.$$

Задача 2.

$$\min_{u \in D \subset R^{2n}} \chi(u) = \min_{u \in D \subset R^{2n}} (\chi_0(u) + \chi_1(u)), \quad (4)$$

где

$$\chi_0(u) = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i}(u_i) \cdot \Phi_{0i}(u_0, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sigma_{0i}(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d > 0; \\ 0, & \text{если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d \leq 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\chi_1(u) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma_{ij}(u_i, u_j) \cdot \Phi_{ij}(u_i, u_j);$$

$$\sigma_{ij}(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Gamma_{ij}(u_i, u_j) > 0; \\ 0, & \text{если } \Gamma_{ij}(u_i, u_j) \leq 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$\Gamma_{ij}(u_i, u_j) = \min \{ \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d, \Phi_{0j}(u_0, u_j) - d, -\Phi_{ij}(u_i, u_j) \}.$$

Рассмотрим аналитический вид Φ -функций [4], которые необходимы для построения конкретных математических моделей вида (1) – (3) или (4) – (6) задач покрытия произвольного множества $T_0(u_0) \in \{C, R, H, K\}$ конгруэнтными кругами, т.е. $T_i(u_i) = C$:

- нормализованная Φ -функция кругов $C_1(x_1, y_1)$ и $C_2(x_2, y_2)$ радиусов r_1 и r_2 :

$$\Phi_{CC}(u_1, u_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - r_1 - r_2;$$

- нормализованная Φ -функция объекта $C_1^* = cl(R^2 \setminus C_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса радиуса r_2 :

$$\Phi_{C^*C}(u_1, u_2) = r_1 - r_2 - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

где C_1 – круг радиуса r_1 , причем $r_1 \geq r_2$;

- нормализованная Φ -функция объекта $R_1^* = cl(R^2 \setminus R_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r :

$$\Phi_{R^*C}(u_1, u_2) = \min \{ \chi_i(x_2 - x_1, y_2 - y_1), i = 1, 2, 3, 4 \},$$

где

$$\chi_1(x, y) = -x + A; \quad \chi_2(x, y) = -y + B;$$

$$\chi_3(x, y) = x + A; \quad \chi_4(x, y) = y + B;$$

$$A = a - r; \quad B = b - r,$$

здесь R_1 – прямоугольник длины $2a$, ширины $2b$ и $r \leq \min \{a, b\}$. Полюса объектов R_1^* и C_2 расположены в центрах симметрии R_1 и C_2 ;

- нормализованная Φ -функция объекта $H_1^* = cl(R^2 \setminus H_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r_2 :

$$\Phi_{H^*C}(u_1, u_2) = \min \{ \chi_i(x_2 - x_1, y_2 - y_1), i = 1, 2, \dots, n \},$$

где

$$\chi_i(x, y) = -\cos(\alpha_i + \alpha/2)x - \sin(\alpha_i + \alpha/2)y + r \cos(\alpha/2),$$

$$x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1; \quad r = r_1 - \frac{r_2}{\cos(\alpha/2)},$$

здесь H_1 – правильный многоугольник, заданный числом сторон n , радиусом описанной окружности r_1 и углом $\theta \in [0, 2\pi/n)$,

$$v_i = (x_i, y_i) = (r_1 \cos \alpha_i, r_1 \sin \alpha_i) -$$

вершины H_1 , $\alpha_i = \theta + (i-1)\alpha$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$\alpha = 2\pi/n$, при этом полагаем, $r_1 \cos(\alpha/2) \geq r_2$;

- нормализованная Φ -функция объекта $K_1^* = cl(R^2 \setminus K_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r ,

которую можно представить так:

$$\Phi_{K^*C}(u_1, u_2) = \min \{ \tilde{g}_i(x_2 - x_1, y_2 - y_1), i = 1, 2, \dots, n \},$$

где $\tilde{g}_i(x, y) = A_i x + B_i y + \tilde{C}_i$, $\tilde{C}_i = C_i - r$,

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad A_i = -(y_{i+1} - y_i) / d_i,$$

$$B_i = (x_{i+1} - x_i) / d_i, \quad C_i = (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) / d_i,$$

$$d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad \text{кроме того,}$$

$$g_i(x, y) > 0 \text{ для всех } (x, y) \notin K_1^*,$$

здесь K_1 – выпуклый многоугольник, заданный вершинами $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом,

полагаем, что радиус круга, вписанного в K_1^* не меньше радиуса r . Полюс объекта K_1^* – некоторая точка, принадлежащая $\text{int } K_1$;

- нормализованная Φ -функция прямоугольника $R_1(x_1, y_1)$ длины $2a$ и ширины $2b$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r :

$$\Phi_{RC}(u_1, u_2) = \chi(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

где

$$\chi(x, y) = \min \{ \varphi(x, y), \max \{ \chi(x, y), \tilde{\chi}(x, y) \} \};$$

$$\varphi(x, y) = \min_{i=1, \dots, 4} \varphi_i(x, y);$$

$$\chi(x, y) = \max_{i=1, \dots, 4} \chi_i(x, y);$$

$$\tilde{\chi}(x, y) = \max_{i=1, \dots, 4} \tilde{\chi}_i(x, y);$$

$$\varphi_1(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - r;$$

$$\varphi_2(x, y) = \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} - r;$$

$$\varphi_3(x, y) = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} - r;$$

$$\varphi_4(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} - r;$$

$$\chi_1(x, y) = x - A; \quad \chi_2(x, y) = y - B;$$

$$\chi_3(x, y) = -x - A; \quad \chi_4(x, y) = -y - B;$$

$$\tilde{\chi}_1(x, y) = x + y - s; \quad \tilde{\chi}_2(x, y) = -x + y - s;$$

$$\tilde{\chi}_3(x, y) = -x - y - s; \quad \tilde{\chi}_4(x, y) = x - y - s;$$

$$A = a + r; \quad B = b + r; \quad s = a + b + r;$$

$$x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1;$$

- нормализованная Φ -функция правильного многоугольника $H_1(x_1, y_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r_2 :

$$\Phi_{HC}(u_1, u_2) = \tilde{\chi}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

где

$$\tilde{\chi}(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \max \{ \min \{ \psi_i(x, y), \tilde{\omega}_i(x, y) \}, \chi_i^*(x, y) \};$$

$$\psi_i(x, y) = -\cos(\alpha_{i+1})x - \sin(\alpha_{i+1})y - r_1 - r_2 \cos(\alpha/2),$$

$$\tilde{\omega}_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r_2;$$

$$\chi_i^*(x, y) = -\cos(\alpha_i + \alpha/2)x - \sin(\alpha_i + \alpha/2)y - r_1 \cos(\alpha/2) - r_2; \quad x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1,$$

здесь многоугольник H_1 задан числом сторон n , радиусом описанной окружности r_1 и углом $\theta \in [0, 2\pi/n)$, $v_i = (x_i, y_i) = (r_1 \cos \alpha_i, r_1 \sin \alpha_i)$ – вершины H_1 , $\alpha_i = \theta + (i-1)\alpha$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 2\pi/n$. Полос объекта H_1 – центр описанной окружности;

• нормализованная Φ -функция выпуклого многоугольника $K_1(x_1, y_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r :

$$\Phi_{KC}(u_1, u_2) = \tilde{\chi}(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(x, y) &= \max\{\psi(x, y), \chi^*(x, y)\}; \\ \psi(x, y) &= \max_{i=1, \dots, n} \min\{\psi_i(x, y), \tilde{\omega}_i(x, y)\}; \\ \chi^*(x, y) &= \max_{i=1, \dots, n} \chi_i^*(x, y); \\ \psi_i(x, y) &= A_i'x - B_i'y + C_i'; \\ \tilde{\omega}_i(x, y) &= \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r; \\ \chi_i^*(x, y) &= A_i x - B_i y + C_i^*; \quad A_i' = y_i^* - y_{i-1}^*; \\ B_i' &= x_i^* - x_{i-1}^*; \quad C_i' = -A_i'(x_i^* + x_{i-1}^*) + B_i'(y_i^* + y_{i-1}^*); \\ C_i^* &= C_i - A_i x_i^* + B_i y_i^*; \\ (x_i^*, y_i^*) &= \frac{r}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} \cdot \begin{pmatrix} A_i \\ -B_i \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1,$$

здесь многоугольник K_1 задан последовательностью вершин $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Полос многоугольника K_1 – некоторая точка, принадлежащая $\text{int } K_1$, $A_i = -(y_{i+1} - y_i) / d_i$, $B_i = (x_{i+1} - x_i) / d_i$, $C_i = (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) / d_i$, $d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$, при этом $\chi_i(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \notin K_1$.

Рассмотрим математическую модель задачи (1) – (3), в случае, когда $T_0(u_0) = C_0(0)$ и $T_i(u_i) = C_i(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда выражения (2), (3) примут соответствующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_i(u_i) &= \begin{cases} 1, & \text{если } r_0 - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r > 0; \\ 0, & \text{если } r_0 - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r \leq 0; \end{cases} \\ D &= \left\{ u \in R^{2n} \mid \Phi(0, u_T) \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

где $\Phi(0, u_T) = \min\{\Phi_{0l}(0, u_l), l = 1, 2, \dots, k\}$ – Φ -

функция составного объекта $T(u_T) = \bigcup_{l=1}^k T_l'(u_l)$ и

$$C_0(0), \quad \bigcup_{l=1}^k T_l(u_l) = \text{cl}(R^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n (\sigma_i(u_i) \cdot C_i(u_i))),$$

$T_l'(u_l)$ – выпуклый замкнутый ϕ -многоугольник [2] пространства R^2 , аппроксимирующий множество $T_l(u_l)$,

$\Phi_{0l}(u_0, u_l)$ – Φ -функция круга $C_0(0)$ и ϕ -многоугольника $T_l'(u_l)$ вычисляется по формуле (7), т.е. $\Phi_{0l}(0, u_l) = \Phi_{KC}(u_l, 0) = \tilde{\chi}(-x_l, -y_l)$, $l = 1, 2, \dots, k$.

В качестве объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$ можно рассматривать ограниченные многосвязные объекты, компоненты связности границы которых имеют пространственную форму границы объектов из набора ζ , и ограниченные объекты, которые в общем случае, являются пересечением и объединением базовых ϕ -объектов из набора ζ и удовлетворяют требованиям, предъявляемым к составным объектам [5].

Вывод

Метод Φ -функций позволяет естественным образом строить математические модели задач покрытия и значительно упростить алгоритм их решения.

Список литературы

1. Daniels K., Inkulu R. *An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report Number 2001-001.*
2. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.* – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
3. Stoyan Yu. G. *Φ -function and its basic properties.* – *Доп. НАН України. Сер. А.* – 2001. – № 9. – С. 31-37.
4. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. *Φ -function for 2D primary objects // Studia Informatica, Paris, University.* – 2002. – Vol. 2, № 1. – P. 1-32.
5. Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. *Φ -function for complex 2D objects // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. Volume 2, Number 1, 2004.* – P. 69-84.

Поступила в редколлегию 29.09.2006

Рецензент: д-р физ-мат. наук, проф. С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.