УДК 514.753

Т.Е. Романова[1], С.Б. Шеховцов[2]

[1]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины*
[2]*Харьковский национальный университет внутренних дел*

Ф-ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ПОКРЫТИЯ

На основе применения метода Ф*-функций строятся математические модели оптимизационных задач покрытия выпуклых ограниченных замкнутых двумерных областей конгруэнтными выпуклыми ограниченными замкнутыми двумерными объектами. В качестве примера приводится аналитический вид* Ф*-функций, необходимых для построения реализаций приведенных математических моделей для задачи покрытия базовой области (круг, прямоугольник, правильный многоугольник, выпуклый многоугольник) кругами заданного радиуса.*

Ф-функция, задачи покрытия

Введение

Задачи покрытия возникают в различных сферах человеческой деятельности, областях науки и техники, в том числе: в телекоммуникациях (для мобильной связи), в системах орошения, пожарной безопасности, в военных сценариях, системах воздушного и космического наблюдения, медицине и многих других приложениях. Достаточно полный обзор и классификация задач покрытия приведена в статье [1].

Рассмотрим **задачу покрытия** в следующей постановке.

Пусть имеется выпуклое компактное множество $T_0 \subset R^2$ и семейство конгруэнтных выпуклых компактных множеств T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (в дальнейшем, объектов).

Необходимо покрыть множество объектами из семейства $\{T_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ таким образом, чтобы заданная функция цели достигала своего экстремума.

Задачи покрытия относятся к классу задач геометрического проектирования [2]. Наименее изученными являются задачи нерегулярного покрытия, для решения которых, как правило, используют эвристические подходы [1].

В монографии [2] предложен подход к решению задач покрытия, моделирование которых основано на использовании аппарата ω-функций. Однако, для вычисления значений ω-функции требуются трудоемкие вычисления площадей, так называемых, составных объектов, которые в общем случае являются пересечениями и объединениями множеств T_i и T_0 и замыканий их дополнений до всего пространства R^2.

Дальнейшее развитие этого направления требует создания современных конструктивных средств аналитического описания условий покрытия заданной области геометрическими объектами с целью построения математических моделей и разработки эффективных методов решения задач обозначенного класса.

Целью данной публикации является построение математической модели поставленной задачи на основе использования метода Ф-функций [3 – 5].

С теоретико-множественной точки зрения значения Φ-функции "различают" следующие ситуации: а) объекты T_1 и T_2 пересекаются, т.е. $\mathrm{int}\,T_1 \cap \mathrm{int}\,T_2 \neq \varnothing$; б) объекты $T_1 = \mathrm{cl}T_1$ и $T_2 = \mathrm{cl}T_2$ не имеют общих точек, т.е. $T_1 \cap T_2 = \varnothing$; в) объекты T_1 и касаются, т.е. $\mathrm{fr}T_1 \cap \mathrm{fr}T_2 \neq \varnothing$ и $\mathrm{int}\,T_1 \cap \mathrm{int}\,T_2 = \varnothing$, здесь $\mathrm{cl}T$, $\mathrm{int}\,T$, $\mathrm{fr}T$ – замыкание, внутренность, граница множества T соответственно.

Очевидно, что Φ -функция зависит от взаимного положения объектов T_1 и T_2, при этом значения этой функции дают численную оценку ситуаций а), б) и в). Кроме того, значения этой функции в случае а) являются "мерой" пересечения T_1 и T_2, а в случае б) либо равно $\rho^*(x_1, x_2) = \min\limits_{x_1 \in T_1, x_2 \in T_2} \|x_1 - x_2\|$, либо являются некоторой оценкой $\rho^*(x_1, x_2)$, где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве R^2.

Следует заметить, что допускаются только собственные конгруэнтные преобразования объектов.

Объект T_i, заданный в собственной системе координат и транслированный на вектор u_i, обозначается как $T_i(u_i)$, $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$.

Аналитический вид Φ -функций естественным образом зависит от пространственной формы объектов. В статье [5] приведены способы построения Φ -функций допустимых пар объектов из набора $\zeta = \{C, R, H, K, C^*, R^*, H^*, K^*\}$, где C – круг, R – прямоугольник, H – правильный многоугольник, K – выпуклый многоугольник, $C^* = \mathrm{cl}(R^2 \setminus C)$, $R^* = \mathrm{cl}(R^2 \setminus R)$, $H^* = \mathrm{cl}(R^2 \setminus H)$, $K^* = \mathrm{cl}(R^2 \setminus K)$. В данном исследовании в качестве пространственных форм объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$ рассматриваются только перечисленные выше односвязные объекты, т.е. $T_0(u_0) \in \{C, R, H, K\}$, $T_i(u_i) \in \{C, R, H, K\}$.

Обозначим Φ -функции объектов, необходимые для построения математических моделей задач покрытия множества $T_0(u_0)$ конгруэнтными объектами $T_i(u_i)$ следующим образом:

1) $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \in \{\Phi_{CC}(u_1, u_2),\ \Phi_{RR}(u_1, u_2),\ \Phi_{HH}(u_1, u_2),\ \Phi_{KK}(u_1, u_2)\}$ – нормализованная Φ -функция объектов и $T_i(u_i)$;

2) $\Phi_{0i}(u_0, u_i) \in \{\Phi_{C^*C}(u_1, u_2),\ \Phi_{R^*C}(u_1, u_2),\ \Phi_{H^*C}(u_1, u_2),\ \Phi_{K^*C}(u_1, u_2),\ \Phi_{C^*R}(u_1, u_2),\ \Phi_{R^*R}(u_1, u_2),\ \Phi_{H^*R}(u_1, u_2),\ \Phi_{K^*R}(u_1, u_2),\ \Phi_{C^*H}(u_1, u_2),\ \Phi_{R^*H}(u_1, u_2),\ \Phi_{H^*H}(u_1, u_2),\ \Phi_{K^*H}(u_1, u_2),\ \Phi_{C^*K}(u_1, u_2),\ \Phi_{R^*K}(u_1, u_2),\ \Phi_{H^*K}(u_1, u_2),\ \Phi_{K^*K}(u_1, u_2)\}$ – нормализованная Φ -функция объектов $T_0^*(u_0) \in \{C^*, R^*, H^*, K^*\}$ и $T_i(u_i)$;

3) $\Phi_{0i}(u_0, u_i) \in \{\Phi_{RC}(u_1, u_2),\ \Phi_{HC}(u_1, u_2),\ \Phi_{KC}(u_1, u_2),\ \Phi_{KH}(u_1, u_2),\ \Phi_{KR}(u_1, u_2),\ \Phi_{HR}(u_1, u_2)\}$ – нормализованная Φ -функция объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$;

4) $\Phi(u_0, u_T) = \min \Phi_{0l}(u_0, u_l), l = 1, 2, \ldots, k\}$ – Ф-функция объектов $T(u_T) = \bigcup\limits_{l=1}^{k} T_l(u_l)$ и $T_0(u_0)$, $\bigcup\limits_{l=1}^{k} T_l(u_l) = \mathrm{cl}(R^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i(u_i))$, $T_l(u_l)$ – выпуклое замкнутое подмножество пространства R^2, $\Phi_{0l}(u_0, u_l)$ – Ф-функция объектов $T_0(u_0)$ и $T_l(u_l)$.

Рассмотрим математические модели поставленной задачи с функциями цели:

а) количество покрывающих объектов;

б) оценка суммарной площади перекрытий покрывающих объектов.

Задача 1.

$$\min_{u \in D \subset R^{2n}} \chi(u) = \min_{u \in D \subset R^{2n}} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(u_i), \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$;

$$\sigma_i(u_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d > 0; \\ 0, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d \le 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$D = \{u \in R^{2n} \,|\, \Phi(u_0, u_T) \ge 0\}; \tag{3}$$

$\Phi(u_0, u_T)$ – Ф-функция объектов $T(u_T) = \mathrm{cl}\left(R^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\sigma_i(u_i) \cdot T_i(u_i))\right)$ и $T_0(u_0)$;

$$d = \min_{(u_0, u_i) \in \tilde{\gamma}_{0i}} \Phi_{0i}(u_0, u_i);$$

$$\tilde{\gamma}_{0i} = \{(u_0, u_i) \in R^4 \,|\, \tilde{\Phi}_{0i}(u_0, u_i) = 0\}.$$

Задача 2.

$$\min_{u \in D \subset R^{2n}} \chi(u) = \min_{u \in D \subset R^{2n}} (\chi_0(u) + \chi_1(u)), \tag{4}$$

где

$$\chi_0(u) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{0i}(u_i) \cdot \Phi_{0i}(u_0, u_i),\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\sigma_{0i}(u_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d > 0; \\ 0, \text{ если } \Phi_{0i}(u_0, u_i) - d \le 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\chi_1(u) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma_{ij}(u_i, u_j) \cdot \Phi_{ij}(u_i, u_j);$$

$$\sigma_{ij}(u_i,u_j)=\begin{cases}1, \text{ если } \Gamma_{ij}(u_i,u_j)>0;\\ 0, \text{ если } \Gamma_{ij}(u_i,u_j)\le 0;\end{cases} \qquad (6)$$

$$\Gamma_{ij}(u_i,u_j)=$$
$$=\min\{\Phi_{0i}(u_0,u_i)-d, \Phi_{0j}(u_0,u_i)-d, -\Phi_{ij}(u_i,u_j)\}.$$

Рассмотрим аналитический вид Φ-функций [4], которые необходимы для построения конкретных математических моделей вида (1) – (3) или (4) – (6) задач покрытия произвольного множества $T_0(u_0)\in\{C,R,H,K\}$ конгруэнтными кругами, т.е. $T_i(u_i)=C$:

- нормализованная Φ-функция кругов $C_1(x_1,y_1)$ и $C_2(x_2,y_2)$ радиусов r_1 и r_2 :

$$\Phi_{CC}(u_1,u_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}-r_1-r_2;$$

- нормализованная Φ-функция объекта $C_1^*=cl(R^2\setminus C_1)$ и круга $C_2(x_2,y_2)$ радиуса радиуса r_2:

$$\Phi_{C^*C}(u_1,u_2)=r_1-r_2-\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где C_1 – круг радиуса r_1 , причем $r_1\ge r_2$;

- нормализованная Φ-функция объекта $R_1^*=cl(R^2\setminus R_1)$ и круга $C_2(x_2,y_2)$ радиуса r :

$$\Phi_{R^*C}(u_1,u_2)=\min\{\chi_i(x_2-x_1,y_2-y_1), i=1,2,3,4\},$$

где

$$\chi_1(x,y)=-x+A;\ \chi_2(x,y)=-y+B;$$
$$\chi_3(x,y)=x+A;\ \chi_4(x,y)=y+B;$$
$$A=a-r;\ B=b-r,$$

здесь R_1 – прямоугольник длины $2a$, ширины $2b$ и $r\le\min\{a,b\}$. Полюса объектов R_1^* и C_2 расположены в центрах симметрии R_1 и C_2;

- нормализованная Φ-функция объекта $H_1^*=cl(R^2\setminus H_1)$ и круга $C_2(x_2,y_2)$ радиуса r_2:

$$\Phi_{H^*C}(u_1,u_2)=\min\{\chi_i(x_2-x_1,y_2-y_1), i=1,2,\ldots,n\},$$

где

$$\chi_i(x,y)=-\cos(\alpha_i+\alpha/2)x-$$
$$-\sin(\alpha_i+\alpha/2)y+r\cos(\alpha/2),$$

$$x=x_2-x_1;\ y=y_2-y_1;\ r=r_1-\frac{r_2}{\cos(\alpha/2)},$$

здесь H_1 – правильный многоугольник, заданный числом сторон n, радиусом описанной окружности r_1 и углом $\theta\in[0,2\pi/n)$,

$v_i=(x_i,y_i)=(r_1\cos\alpha_i, r_1\sin\alpha_i)$ – вершины H_1, $\alpha_i=\theta+(i-1)\alpha$, $i=1,2,\ldots,n$, $\alpha=2\pi/n$, при этом полагаем, $r_1\cos(\alpha/2)\ge r_2$;

- нормализованная Φ-функция объекта $K_1^*=cl(R^2\setminus K_1)$ и круга $C_2(x_2,y_2)$ радиуса r, которую можно представить так:

$$\Phi_{K^*C}(u_1,u_2)=\min\{\tilde g_i(x_2-x_1,y_2-y_1), i=1,2,\ldots,n\},$$

где $\tilde g_i(x,y)=A_ix+B_iy+\tilde C_i$, $\tilde C_i=C_i-r$, $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $A_i=-(y_{i+1}-y_i)/d_i$, $B_i=(x_{i+1}-x_i)/d_i$, $C_i=(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)/d_i$, $d_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$, кроме того, $g_i(x,y)>0$ для всех $(x,y)\notin K_1^*$,

здесь K_1 – выпуклый многоугольник, заданный вершинами $v_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. При этом, полагаем, что радиус круга, вписанного в K_1^* не меньше радиуса r. Полюс объекта K_1^* – некоторая точка, принадлежащая $\operatorname{int}K_1$;

- нормализованная Φ-функция прямоугольника $R_1(x_1,y_1)$ длины $2a$ и ширины $2b$ и круга $C_2(x_2,y_2)$ радиуса r:

$$\Phi_{RC}(u_1,u_2)=\chi(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

где

$$\chi(x,y)=\min\{\varphi(x,y),\max\{\chi(x,y),\tilde\chi(x,y)\}\};$$
$$\varphi(x,y)=\min_{i=1,\ldots,4}\varphi_i(x,y);$$
$$\chi(x,y)=\max_{i=1,\ldots,4}\chi_i(x,y);$$
$$\tilde\chi(x,y)=\max_{i=1,\ldots,4}\tilde\chi_i(x,y);$$
$$\varphi_1(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}-r;$$
$$\varphi_2(x,y)=\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}-r;$$
$$\varphi_3(x,y)=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}-r;$$
$$\varphi_4(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}-r;$$
$$\chi_1(x,y)=x-A;\ \chi_2(x,y)=y-B;$$
$$\chi_3(x,y)=-x-A;\ \chi_4(x,y)=-y-B;$$
$$\tilde\chi_1(x,y)=x+y-s;\ \tilde\chi_2(x,y)=-x+y-s;$$
$$\tilde\chi_3(x,y)=-x-y-s;\ \tilde\chi_1(x,y)=x-y-s;$$
$$A=a+r;\ B=b+r;\ s=a+b+r;$$
$$x=x_2-x_1;\ y=y_2-y_1;$$

- нормализованная Φ-функция правильного многоугольника $H_1(x_1,y_1)$ и круга $C_2(x_2,y_2)$ радиуса r_2:

$$\Phi_{HC}(u_1,u_2)=\tilde\chi(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

где

$$\tilde\chi(x,y)=\max_{i=1,\ldots,n}\max\{\min\{\psi_i(x,y),\tilde\omega_i(x,y)\},\chi_i^*(x,y)\};$$
$$\psi_i(x,y)=-\cos(\alpha_{i+1})x-\sin(\alpha_{i+1})y-r_1-r_2\cos(\alpha/2),$$
$$\tilde\omega_i(x,y)=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}-r_2;$$

$$\chi_i^*(x,y) = -\cos(\alpha_i + \alpha/2)x - \sin(\alpha_i + \alpha/2)y -$$
$$-r_1\cos(\alpha/2) - r_2;\ \ x = x_2 - x_1;\ \ y = y_2 - y_1,$$

здесь многоугольник H_1 задан числом сторон n, радиусом описанной окружности r_1 и углом $\theta \in [0, 2\pi/n)$, $v_i = (x_i, y_i) = (r_1\cos\alpha_i, r_1\sin\alpha_i)$ – вершины H_1, $\alpha_i = \theta + (i-1)\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = 2\pi/n$. Полюс объекта H_1 – центр описанной окружности;

- нормализованная Φ-функция выпуклого многоугольника $K_1(x_1, y_1)$ и круга $C_2(x_2, y_2)$ радиуса r:

$$\Phi_{KC}(u_1, u_2) = \tilde{\chi}(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \qquad (7)$$

где

$$\tilde{\chi}(x,y) = \max\{\psi(x,y), \chi^*(x,y)\};$$
$$\psi(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} \min\{\{\psi_i(x,y), \tilde{\omega}_i(x,y)\};$$
$$\chi^*(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} \chi_i^*(x,y);$$
$$\psi_i(x,y) = A_i'x - B_i'y + C_i';$$
$$\tilde{\omega}_i(x,y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r\ ;$$
$$\chi_i^*(x,y) = A_i x - B_i y + C_i^*;\ \ A_i' = y_i^* - y_{i-1}^*;$$
$$B_i' = x_i^* - x_{i-1}^*;\ C_i' = -A_i'(x_i^* + x_{i-1}^*) + B_i'(y_i^* + y_{i-1}^*);$$
$$C_i^* = C_i - A_i x_i^* + B_i y_i^*;$$
$$(x_i^*, y_i^*) = \frac{r}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} \cdot \begin{pmatrix} A_i \\ -B_i \end{pmatrix};$$
$$x = x_2 - x_1;\quad y = y_2 - y_1,$$

здесь многоугольник K_1 задан последовательностью вершин $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Полюс многоугольника K_1 – некоторая точка, принадлежащая $\operatorname{int} K_1$, $A_i = -(y_{i+1} - y_i)/d_i$, $B_i = (x_{i+1} - x_i)/d_i$, $C_i = (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)/d_i$, $d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$, при этом $\chi_i(x,y) > 0$ для всех $(x,y) \notin K_1$.

Рассмотрим математическую модель задачи (1) – (3), в случае, когда $T_0(u_0) = C_0(0)$ и $T_i(u_i) = C_i(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда выражения (2), (3) примут соответствующий вид:

$$\sigma_i(u_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } r_0 - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r > 0; \\ 0, \text{ если } r_0 - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r \le 0; \end{cases}$$
$$D = \left\{u \in R^{2n} \,\middle|\, \Phi(0, u_T) \ge 0\right\},$$

где $\Phi(0, u_T) = \min\left\{\Phi_{0l}(0, u_l), l = 1, 2, \ldots, k\right\}$ – Ф-функция составного объекта $T(u_T) = \bigcup_{l=1}^{k} T_l'(u_l)$ и $C_0(0)$, $\bigcup_{l=1}^{k} T_l(u_l) = \mathrm{cl}(R^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(\sigma_i(u_i) \cdot C_i(u_i))$,

$T_l'(u_l)$ – выпуклый замкнутый φ-многоугольник [2] пространства R^2, аппроксимирующий множество $T_l(u_l)$,

$\Phi_{0l}(u_0, u_l)$ – Ф-функция круга $C_0(0)$ и φ-многоугольника $T_l'(u_l)$ вычисляется по формуле (7), т.е. $\Phi_{0l}(0, u_l) = \Phi_{KC}(u_l, 0) = \tilde{\chi}(-x_l, -y_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k$.

В качестве объектов $T_0(u_0)$ и $T_i(u_i)$ можно рассматривать ограниченные многосвязные объекты, компоненты связности границы которых имеют пространственную форму границы объектов из набора ζ, и ограниченные объекты, которые в общем случае, являются пересечением и объединением базовых φ-объектов из набора ζ и удовлетворяют требованиям, предъявляемым к составным объектам [5].

Вывод

Метод Ф-функций позволяет естественным образом строить математические модели задач покрытия и значительно упростить алгоритм их решения.

Список литературы

1. *Daniels K., Inkulu R. An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Scince Technical Report Number 2001-001.*
2. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.*
3. *Stoyan Yu. G. Ф-function and its basic properties. – Доп. НАН України. Сер. А. – 2001. – № 9. – С. 31-37.*
4. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Ф-function for 2D primary objects // Studia Informatica, Paris, University. – 2002. – Vol. 2, № 1. – P. 1-32.*
5. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Ф-function for complex 2D objects // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. Volume 2, Number 1, 2004. – P. 69-84.*

Поступила в редколлегию 29.09.2006

Рецензент: д-р физ-мат. наук, проф. С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.