УДК 623. 021: 005

В.Б. Кононов

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СОСТАВА ОДНОРОДНЫХ БОЕВЫХ СРЕДСТВ ПРОТИВОДЕЙСТВУЮЩИХ ГРУППИРОВОК

В статье изложены разработанные математические модели задач оптимизации состава однородных боевых средств на основе статических моделей с учетом противодействия противника.

однородные боевые средства, статическая модель

Введение

Постановка задачи. Расчет сил и средств оперирующих группировок в конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооруженных Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. В известной литературе, посвященной исследованию операций в военном деле, [1 – 5] рассматриваются различные аспекты управления войсками. Так, в [1] рассматриваются задачи оценки эффективности вооружения в различных боевых ситуациях с учетом его качества, надежности и различных форм противодействия противника. Приводятся сведения о классических математических методах оптимизации, применяемых при решении военно-технических задач. В [2] излагаются основные положения теории исследования операций и показываются возможности по применению ее методов при оценке эффективности боевых действий подразделений и частей противовоздушной обороны. В [3] особое внимание уделяется методам построения моделей ведения военных действий. В [4] рассмотрены основные разделы теории исследования операций, иллюстрируемые решением примеров применительно к ведению военных действий. В [5] изложены количественные методы обоснования военно-экономических решений на основе экономико-математических моделей, даны примеры решения отдельных задач. В представленной литературе достаточное внимание уделяется применяемому при ведении военных действий математическому аппарату, однако практические примеры, рассматриваемые в вышеуказанной литературе, носят простейший характер, не учитывающий современных тенденций ведения военных действий.

Цель статьи. Разработка математических моделей задач оптимизации состава однородных боевых средств на основе статических моделей с учетом противодействия противника.

Основной материал

При решении рассматриваемой задачи используем терминологию, изложенную в работе [2]. Здесь предлагается вероятность определения боевого средства $W_{опр}(n)$ за n последовательных обзоров находить из соотношения определяется как $W_{опр}(n) = 1 - Q(n)$, где $Q(n)$ – вероятность не обнаружения боевого средства. Считая, что мгновенная вероятность определения q в каждом обзоре величина независимая и условия наблюдения не меняются $(q = \text{const})$, значение $Q(n) = (1-q)^n$. Естественно, что при этом $W_{опр}(n)$ находится из следующего соотношения:

$$W_{опр}(n) = 1 - (1-q)^n. \qquad (1)$$

При изменении условий наблюдения $(q = \text{var})$ выражение (1) примет вид:

$$W_{опр}(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i). \qquad (2)$$

Вероятность обнаружения боевого средства, не менее k раз в n последовательных обзорах $(k \rangle 1)$ при условии неизменности наблюдений от обзора к обзору $(q = \text{const})$ и, исходя из биноминального закона распределения $P_{i,n} = C_n^i q^i (1-q)^{n-1}$ (C_n^i –число сочетаний из n по i), рассчитывают по соотношению:

$$\begin{aligned} W_{k,n} &= \sum_{i=k}^{n} P_{i,n} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i q^i (1-q)^{n-1} = \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i q^i (1-q)^{n-1}, \end{aligned} \qquad (3)$$

при $\left(i = \overline{1, n}\right)$.

Будем считать, что противник применил n однородных боевых средств. Это предположение носит вероятностный характер, в связи с чем, вероятность боевого столкновения однородных боевых средств противоборствующих группировок при общем количестве m однородных боевых средств противника определится из биномиального закона распределения:

$$P_{(n)} = C_m^n p^n (1-p)^{m-n}. \quad (4)$$

Данная формула справедлива, когда назначение каждого боевого средства противника на боевое средство противоборствующей группировки происходит независимо от назначения других средств.

При известном среднем количестве $\overline{n}$ однородных боевых средств противника закон распределения количества нападающих однородных боевых средств противника может быть пуассоновским, а вероятность поражения равна

$$P_{(n)} = \frac{\overline{n}}{n!} e^{-n}. \quad (5)$$

В данном случае, количество n_i однородных боевых средств противника i-го типа определятся с некоторой вероятностью, а значение показателя эффективности операции $W = W(n_1, \cdots, n_l)$ требует применения n_i боевых средств ℓ-го типа. При приближенной оценке эффективности действий своих боевых средств задаются средними возможностями $\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_\ell}$ нападающих боевых средств. Общее количество средств нападения будет равно $N = \overline{n_1} + \cdots + \overline{n_\ell}$.

Вероятность непоражения своих боевых средств при нападении $N = \overline{n_1} + \cdots + \overline{n_\ell}$ боевых средств противника определим, исходя из того, что вероятность уничтожения j-го однородного боевого средства однородными боевыми средствами противника равна u_j. Вероятность поражения j-го однородного боевого средства противника, при условии его неуничтожения, равна v_j. Полная вероятность p_j уничтожения своих однородных боевых средств j-м однородным боевым средством противника равна:

$$p_j = (1-u_j) v_j = q_j u_j, \quad (6)$$

где $q_j = 1 - u_j$ – вероятность не уничтожения j-го однородного боевого средства противника. Вероятность неуничтожения своего однородного боевого средства j-м однородным боевым средством противника равна $1 - p_j = 1 - q_j v_j$. Вероятность непоражения всеми однородного боевыми средствами противника своего однородного боевого средства равна:

$$Q = (1-q_1 v_1)(1-q_2 v_2) \bullet \cdots \bullet (1-q_N v_N) = \prod_{j=1}^{N} (1-q_j v_j). \quad (7)$$

Средняя доля ущерба, наносимая своему боевому средству N боевыми средствами противника, имеет вид [2]:

$$y = 1 - \prod_{j=1}^{N} (1-\overline{s_j}), \quad (8)$$

где $\overline{s_j} = 0 \cdot u_j + s_j q_j$ – математическое ожидание ущерба, наносимого одному боевому средству противника, при нанесении ущерба j-му боевому средству противника.

При наличии однородных боевых средств противника ($u_1 = u_2 = \cdots = u_N = u$ и $s_1 = s_2 = \cdots = s_N = s$) формула (8) примет вид:

$$y = 1 - (1 - sq)^n, \quad (9)$$

где $q = 1 - u$.

Полученные соотношения позволят решить задачу определения потребного количества однородных боевых средств x_0 группировки A, противостоящих y_0 – количеству однородных боевых средств группировки B (противника). Фактически требуется определить то количество однородных боевых средств, при использовании которых критерий эффективности достигает заданного значения.

В качестве критерия эффективности выполнения боевой задачи данными боевыми средствами возьмем математическое ожидание числа пораженных боевых средств в составе групповой цели. Будем считать, что боевые средства группировки A равномерно распределены при атаке по атакующей группе (встречный бой) группировки B**.** В таком случае вероятность поражения одного боевого средства противника с учетом противодействия будет равна

$$P(x_0) = 1 - [1 - p(1-q)]^{\frac{x_0}{y_0}}, \quad (10)$$

где p – вероятность поражения боевого средства группировки B одним боевым средством группировки A; q **–** вероятность поражения боевого средства группировки A одним боевым средством группировки B; $\frac{x_0}{y_0}$ – среднее число атакующих действий боевых средств группировки A.

Математическое ожидание числа пораженных целей определяется по формуле

$$M_{од}(x_0) = y_0 P(x_0) = y_0 \left\{ 1 - [1 - p(1-q)]^{\frac{x_0}{y_0}} \right\}. \quad (11)$$

Если задаться величиной потерь r% для группировки противника, то заданное значение критерия эффективности примет вид

$$M_{од}^{B}(x_0) = 0{,}01\, r y_0$$

или

$$y_0 \left\{ 1 - [1 - p(1-q)]^{\frac{x_0}{y_0}} \right\} = 0{,}01\, r y_0, \quad (12)$$

откуда устанавливается связь между вероятностью поражения и средним числом атак группировки А

$$1 - [1 - p(1-q)]^{\frac{x_0}{y_0}} = 0{,}01\, r. \quad (13)$$

Из соотношения (13) определяется минимальное количество однородных боевых средств группировки А:

$$x_0 = y_0 \frac{\lg(1 - 0{,}01\, r)}{\lg(1 - p + pq)}, \quad (14)$$

причем, математическое ожидание числа пораженных боевых средств группировки А составит:

$$M_{од}^{A}(x_0) = x_0 \left[1 - (1 - p + pq)^{\frac{y_0}{x_0}} \right]. \quad (15)$$

Обобщая полученные результаты для случая боя однородной группировки А против разнородных боевых средств группировки В, рассмотрим задачу определения плана распределения однородных боевых средств группировки А против разнородных боевых средств группировки В по критерию минимума математического ожидания суммарного количества разнородных боевых средств группировки В с учетом их важности.

Вначале определим вероятность поражения одного боевого средства j-го типа противника с учетом его противодействия, как

$$P_j^{x_j} = 1 - \left[1 - p_j (1 - q_j) \right]^{\frac{x_j}{y_j}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где n – количество боевых средств группировки В; $p_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ – вероятность поражения одним боевым средством группировки А одного боевого средства j-го типа группировки В; $q_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ – вероятность поражения одним боевым средством j-го типа группировки В одного боевого средства группировки А; $y_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ – количество боевых средств группировки В; $x_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ – искомое количество боевых средств группировки А, атакующих y_j боевых средств группировки В по равномерному закону.

Тогда, математическое ожидание числа пораженных боевых средств j-го типа группировки В будет

$$M_j^{B}(x_j) = y_j P_j^{x_j} = y_j \left[1 - (1 - p_j + p_j q_j)^{\frac{x_j}{y_j}} \right], \quad j = \overline{1, n},$$

а математическое ожидание суммарного количества пораженных разнородных боевых средств группировки В с учетом их важности будет:

$$M_H^{B}(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j M_j^{B}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left[1 - (1 - p_j + p_j q_j)^{\frac{x_j}{y_j}} \right].$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи примет следующий вид:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left[1 - (1 - p_j + p_j q_j)^{\frac{x_j}{y_j}} \right] \ge 0{,}01 r \cdot \sum_{j=1}^{n} w_j y_j; \quad (17)$$

$$x_j = [x_j] \ge 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где w_j – коэффициент важности боевых средств j-го типа группировки В.

Определим математическое ожидание суммарных потерь группировки А при оптимальном плане их распределения $x^* = \left[x_1^*,\ x_2^*, \cdots, x_n^*\right]^T$. Вероятность поражения одного боевого средства группировки А боевыми средствами j-го типа группировки В равна

$$Q_j(x^*) = 1 - (1 - q_j + p_j q_j)^{\frac{y_j}{x_0^*}}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (18)$$

тогда вероятность поражения одного боевого средства группировки А всеми типами боевых средств группировки В равна

$$Q(x^*) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - Q_j(x^*) \right] = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j + p_j q_j)^{\frac{y_j}{x_0^*}}, \quad (19)$$

а искомое ожидание суммарных математических потерь группировки А примет вид:

$$M_{од}^{A}(x^*) = x^* \left[1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j + p_j q_j)^{\frac{y_j}{x_0^*}} \right], \quad (20)$$

где

$$x_0^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* .$$

Выводы

1. В статье предложено математическое описание задач определения противоборствующих группировок одного боевого средства.

2. Предложены аналитические соотношения для определения количественного оптимизации состава однородных боевых средств на основе статических моделей с учетом противодействия противника.

3. Предложенные математические модели можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

Список литературы

1. Основы исследования операций в военной технике / Под ред. Ю.В. Чуева. – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.

2. Осинский Л.М. Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушой обороны. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.

3. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.

4. Справочник по исследованию операций / Под общ. ред. Ф.А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. –368 с.

5. Военно-экономический анализ и исследование операций. Ч. 3. Количественные методы обоснования военно-экономических решений / Жуков Г.П. и др. – М.: МФИ, 1981. – 252 с.

Поступила в редколлегию 2.12.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.Ф. Самойленко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.