УДК 681.513

С.Г. Удовенко, Л.Э. Чалая, В.И. Перепелица

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

СУБОПТИМАЛЬНЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Статья посвящена решению задачи субоптимального управления многомерными стохастическими объектами, основанного на использовании моделей пониженного порядка. Результаты моделирования подтверждают эффективность разработанного регулятора.

субоптимальный стохастический регулятор, модель пониженного порядка

Введение

Точное решение задачи линейно-квадратичного управления стохастическими объектами с заданным распределением шума (ЛК-задачи) возможно лишь при заданном полном описании динамики управляемого процесса в пространстве состояний.

На практике применение полной ARMAX-модели высокого порядка для синтеза параметрически оптимизируемого ЛК-регулятора не всегда является приемлемым из-за отсутствия достоверной информации о некоторых элементах вектора состояний объекта или вследствие ограничений на трудоемкость реализации вычислительных процедур в каждом такте управления [1, 2]. В связи с этим актуальной является задача синтеза эффективных стохастических регуляторов, основанных на использовании редуцированной модели объекта.

Постановка задачи. Предположим, что полный вектор состояния $x(k)$ может быть декомпозирован следующим образом:

$$x(k) = (x_a(k), x_b(k))^T, \qquad (1)$$

где $x_a(k)$ – фиксированные измеряемые состояния, используемые для синтеза управляющих воздействий; T – символ транспонирования; k – дискретное время.

Поставим задачу оптимальной редукции полной модели, при которой возможно построение субоптимальных ЛКГ-регуляторов заданного качества.

Оценка качества таких регуляторов может быть осуществлена с помощью аддитивных функционалов вида:

$$Q(1,N) = N^{-1} M\left\{\sum_{k=1}^{N} q(x_a(k), u(k))\right\}, \qquad (2)$$

где $M\{\cdot\}$ – символ математического ожидания; $u(k)$ – вектор управлений; $q(x_a(k), u(k))$ – неотрицательная функция потерь; N_k – горизонт управления; $Q(1, N_k)$ – усредненное значение функционала качества в интервале $k = \overline{1, N_k}$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$p(c|d)$ – функция условной плотности вероятности (ФУПВ) случайной переменной c, обусловленной d;

$M(c|d)$ – условное математическое ожидание, соответствующее ФУПВ $p(a|b)$;

$x(k, l) = (x(k), x(k+1), ..., x(l))$ для $l \geq k$;

m_a, m_b – размерности векторов $x_a(k)$ и $x_b(k)$ соответственно.

Критерий (2) должен быть минимизирован в классе рандомизированных регуляторов при ограничении:

$$p(u(k)|x(1, k-1), u(1, k-1)) = p(u(k)|x_a(k-1)). \quad (3)$$

Из определения состояния следует, что:

$$p(x(k)|x(1, k-1), u(1, k)) = p(x(k)|x(k-1), u(k)). \quad (4)$$

Решение задачи

Субоптимальный регулятор, минимизирующий функционал (2) и использующий информацию о неполном векторе состояния $x_a(k)$, может быть синтезирован с применением процедуры динамического программирования.

При этом оптимальные входы $u(k)$ соответствуют минимизирующим аргументам в последовательности задач:

$$\begin{aligned} J^*(x_a(k-1)) = \min_{u(k)} M\{&q(x_a(k), u(k)) \\ &+ J^*(x_a(k)) | x_a(k-1), u(k)\}, \end{aligned} \qquad (5)$$

$k = N, N-1, ..., 1$; $J^*(x_a(N)) = 0$.

Достижимым минимумом здесь является

$$Q^*(1, N) = N^{-1} M\{J^*(x_a(0))\}. \qquad (6)$$

Для ЛКГ-задачи допустимой является квадратичная форма функционала (2), при которой

$$q(x_a(k), u(k)) = x_a^T(k) q_a(k) x_a(k) + u^T(k) q_u(k) u(k), \quad (7)$$

где $q_a(k) \geq 0$; $q_u(k) \geq 0$.

Пусть рассматриваемая стохастическая система полностью может быть описана нормализованной моделью r -го порядка:

$$p(y(k)\,|\,y(1,k-1);\ u(1,k)) = N_0(y(k)\,|\,P^T z(k), RR^T), \quad (8)$$

где $N_0(\cdot)$ – символ нормального распределения; P – коэффициенты модели; R – корень Холецкого от ковариационной матрицы модели;

$$z(k) = (u(k), \tilde{x}(k))^T =$$
$$= (u(k), y(k-1), u(k-1), \ldots, y(k-r), u(k-r), 1);$$
$$y(1,k-1) = (y(1), y(2), \ldots, y(k-1))^T;$$
$$u(1,k) = (u(1), u(2), \ldots, u(k))^T.$$

Состояние $x(k)$ соответствует такому линейному регулярному преобразованию состояния $\tilde{x}(k)$ с оператором S, что

$$x(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \tilde{x}(k), \quad (9)$$

где I – единичная матрица, размерность которой равна размерности выхода $y(k)$.

Таким образом, справедливым является представление исходной модели в виде:

$$p(x(k)\,|\,x(k-1), u(k)) =$$
$$= N_0\left(x(k)\,|\,(P,F)^T z(k), \begin{bmatrix} RR^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad (10)$$

где

$$z(k) = (u(k), x(k-1))^T;$$

$$F = S \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Декомпозируя полный вектор состояния в соответствии с (1), можно получить следующую форму представления субоптимального линейного ЛКГ-регулятора:

$$u(k) = -L_a^T(k) x_a(k-1) = -\left[L_a^T(k), 0 \right] x(k-1) =$$
$$= -L^T(k) x(k-1). \quad (12)$$

В регуляторе (12) учтена нормальность используемой стохастической модели. Можно показать, что редуцированная модель системы, достаточная для минимизации функционала качества (7) в классе регуляторов (12) должна иметь вид:

$$p(x_a(k)\,|\,x_a(k-1), u(k)) =$$
$$= N_0(x_a(k)\,|\,B_a[(u(k), x_a(k-1), x_b(k-1))^T +$$
$$+ \tilde{R}_{ba}^{-1}(k-1)\tilde{R}_a^{-1}(k-1)(x_a(k-1) - \bar{x}_a(k-1))] \times \quad (13)$$
$$\times B_{ab} \tilde{R}_b(k-1) \tilde{R}_b^T(k-1) B_{ab}^T + + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}^T \Bigg),$$

где

$$Cov(x(k)) = \tilde{R}(k)\tilde{R}^T(k) = \begin{bmatrix} \tilde{R}_a(k) & 0 \\ \tilde{R}_{ba}(k) & \tilde{R}_b(k) \end{bmatrix} \tilde{R}^T(k);$$

$$B = [P, F]^T = [B_a, B_b]^T;\ B_a = [B_{aa}, B_{ab}].$$

Адаптивные регуляторы, работающие с вектором состояний уменьшенной размерности в соответствии с (13), должны быть дополнены процедурой текущей переоценки 1-го и 2-го моментов соответствующих характеристик объекта. Выбор размерности вектора $x_a(k)$ может быть основан на рассмотренной в [3] стратегии структурной идентификации. Эта стратегия использует байесовские количественные оценки значимости отдельных элементов модели, используемой в контурах стохастических ЛК-регуляторов. Байесовские модели органично вписываются в общую структуру многомерных цифровых систем управления и позволяют реализовать на практике различные схемы адаптивной оптимизации.

Для квазистационарных объектов возможны ситуации, когда при функционировании регулятора целесообразно корректировать структуру редуцированной модели. Это вызывает необходимость коррекции корня Холецкого. Существенное снижение объема необходимых вычислений может быть достигнуто с использованием LD -факторизации.

Результаты моделирования

Для оценки эффективности данного подхода предложено моделирование работы цифрового ЛК-регулятора с редуцированной ARMAX-моделью 3-го порядка вида:

$$y(k) = u(k) - 1{,}46u(k-1) + 0{,}81u(k-2) + 2{,}28y(k-1) -$$
$$-1{,}929y(k-2) + 0{,}558y(k-3) + 0{,}1e(k) + 0{,}0637e(k-1).$$

где $e(k)$ – дискретный белый шум.

В табл. 1 приводятся значения критерия качества во время $(Q(1,100))$ и после $(Q(101,200))$ переходного процесса для различных типов управления.

Таблица 1

Значения критерия качества для различных регуляторов

Тип регулятора	$(Q(1,100))$	$(Q(101,200))$
Субоптимальный регулятор с редуцированной моделью	$5{,}45 \cdot 10^{-2}$	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$
Цифровой детерминированный ПИД-регулятор	$7{,}39 \cdot 10^{-2}$	$4{,}24 \cdot 10^{-2}$
Отсутствие управления	$133{,}9 \cdot 10^{-2}$	$90{,}61 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенного стохастического регулятора.

Выводы

Субоптимальные цифровые регуляторы, основанные на использовании редуцированной стохастической модели, могут быть реализованы при управлении скалярными и многомерными объектами, для которых является невозможным или затруднительным оперативное оценивание полного вектора состояний.

Перспективным представляется развитие теоретического обоснования предложенного подхода и тестирование полученных результатов для различных типов стохастических систем.

Список литературы

1. *Kevicki L. Combined identification and control: another way // Control Engineering Practice. – 1996. – Vol.4, № 5.– P. 685-698.*
2. *Wellstead P.E., Zarrop M.V. Self-tuning systems: control and signal processing.– Chichester, LTD, 1991. – 574 p.*
3. *Бодянский Е.В., Удовенко С.Г., Ачкасов А.Е. Субоптимальное управление стохастическими процессами. – Х.: Основа, 1997. – 140 с.*

Поступила в редколлегию 12.12.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Е.В. Бодянский, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.