УДК 621.327

В.В. Баранник[1], А.К. Юдин[2]

[1]*Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба*
[2]*Национальный авиационный университет, Киев*

ОЦЕНКА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХПРИЗНАКОВЫХ СТРУКТУРНЫХ КОДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Излагается методика оценки помехоустойчивости структурных кодовых конструкций к ошибкам в канале связи. При этом учитываются как особенности модели появления ошибок в кодах при их передачи по каналу связи, так и свойства процесса восстановления структурных кодовых комбинаций. Проводится сравнительная оценка достоверности информации на приемной стороне в случае передачи исходных данных в несжатом виде, передачи кодов однопризнаковых и двухпризнаковых чисел в двоичном полиадическом пространстве.

помехоустойчивость к ошибкам в канале связи, двухпризнаковые структурные числа

Введение

В работе [1] разработан метод структурного восстановления, позволяющий без погрешности получить исходные данные. Однако в случае передачи кодовых комбинаций сжатых данных по каналу связи с ошибками могут возникнуть искажения, влияющие на достоверность восстанавливаемой информации [2 – 5]. Значит, для достоверного получения информации структурное компактное представление данных должно обладать не только свойством взаимнооднозначного восстановления, но и обладать помехоустойчивыми свойствами к ошибкам в канале связи. В тоже время методика оценки помехоустойчивости двухпризнаковых кодовых конструкций в полиадическом пространстве являются слабо исследованными. Поэтому **цель статьи** заключается в проведении оценки помехоустойчивости двухпризнаковых структурных кодовых конструкций к ошибкам в канале связи.

Методика оценки помехоустойчивости двухпризнаковых кодовых конструкций к ошибкам в канале связи

Рассмотрим вариант, когда каждая компонента последовательности $A(m, \Theta^{(x)})_j$ представляет собой отдельный элемент обрабатываемых данных. Показателем помехоустойчивости является значение количества ν двоичных элементов восстановленных с ошибкой. Если длина двухпризнакового числа равна m, то величина ν изменяется в пределах $0 \le \nu \le m$. Рассмотрим оценку помехоустойчивости кодовых комбинаций, когда при их передаче по каналу связи ошибки возникают независимо друг от друга с вероятностью p_0 (модель канала ДСК). Тогда для варианта передачи по каналу связи исходных m-элементных последовательностей без сжатия вероятность $P^{(0)}_{\nu,m}$ того, что ошибка произойдет в ν двоичных элементах равна [2, 3, 5]:

$$P^{(0)}_{\nu,m} = n^{(0)}_{m,\nu}\, p_0^{\nu}\, (1-p_0)^{m-\nu}, \qquad (1)$$

где $n^{(0)}_{m,\nu}$ – количество размещений ν искаженных двоичных элементов в последовательности длиной m, $n^{(0)}_{m,\nu} = m!\,/\,(\nu!\,(m-\nu)!)$; p_0 – вероятность события, состоящего в том, что в двоичном элементе произойдет ошибка $p_0 = (1-q_0)$.

Если исходная двоичная последовательность представляется предварительно в компактном виде, то по каналу связи передается кодовое слово N_L.

 © В.В. Баранник, А.К. Юдин

Кодовое слова несет информацию о значении кода-номера $N(m,\Lambda,\Theta^{(x)})_j$ двухпризнакового структурного числа $A(m,\Theta^{(x)})_j$. Для определения вероятности $P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)}$, того, что вследствие действия ошибок канала связи, произошли искажения в ν элементах двухпризнакового структурного числа сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. Для модели канала связи ДСК вероятность $P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)}$ того, что при восстановлении двухпризнаковых структурных чисел будет искажено ν элементов, определяется на основе соотношения

$$P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)} = \sum_{\nu(A_L)=1}^{\nu(A_L)_{\max}} n(\nu(A_L))_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{L} n(\nu(A_L))_{\vartheta,m,\Lambda,i}\ p_0^{\nu(A_L)}\ q_0^{L-\nu(A_L)}; \quad (2)$$

$$n(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m,i} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (L-i) \\ (\nu(A_L)-\beta_i) \end{pmatrix} & \to a_i^{(\max)} = 1; \\ 0 & \to a_i^{(\max)} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$a_i^{(\max)} = [\frac{V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)}{2^{i-1}}] - 2\,[\frac{V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)}{2^i}], \quad (4)$$

$$\beta_i = \sum_{\xi=1}^{i-1} a_\xi^{(\max)}; \quad (5)$$

$$i = \overline{1,L}; \quad 1 \le \nu \le \nu_{\max},$$

где $p_0^{\nu(A_L)}$ – вероятность наличия искажений в $\nu(A_L)$ разрядах кодового слова N_L; $q_0^{L-\nu(A_L)}$ – вероятность отсутствия искажений в $(L-\nu(A_L))$ разрядах кодового слова N_L:

$$q_0^{L-\nu(A_L)} = (1-p_0)^{L-\nu(A_L)};$$

$n(\nu(A_L))_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}$ – количество ν-кратных ошибок при восстановлении двухпризнаковых чисел $A(m,\Theta^{(x)})_j$ в зависимости от количества ошибок $\nu(A_L)$ в кодовом слове N_L:

$$1 \le \nu(A_L) \le \nu(A_L)_{\max};$$

$\nu(A_L)_{\max}$ – максимальное количество ошибок, которое может произойти в кодовом слове N_L с учетом того, что оно сформировано для двухпризнакового структурного числа $A(m,\Theta^{(x)})_j$; $\nu_{\max}$ – максимальное количество ошибок, которое может произойти при восстановлении двухпризнакового структурного числа $A(m,\vartheta)_j$; $V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)$ – суммарное количество m-элементных двухпризнаковых структурных чисел, элементы которых удовлетворяют вектору $\Theta^{(x)}$ ограничений на число серий единиц в допустимых зонах и вектору Λ ограничений на позиции с допустимым появлением единиц; $a_i^{(\max)}$ – i-й элемент L-разрядного двоичного представления величины $V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)$; β_i – параметр, равный сумме значений предыдущих $(i-1)$ элементов.

Доказательство. Вследствие действия ошибок в канале связи в кодовом слове N_L, содержащем информацию о коде-номере $N(m,\Lambda,\Theta^{(x)})_j$ двухпризнакового структурного числа $A(m,\Theta^{(x)})_j$, произойдут искажения. На приемной стороне будет принят код-номер $N(m,\Lambda,\Theta^{(x)})_j^{\bullet}$, такой, что выполняется неравенство

$$N(m,\Lambda,\Theta^{(x)})_j^{\bullet} \ne N(m,\Lambda,\Theta^{(x)})_j.$$

В этом случае из-за взаимооднозначности процесса компактного представления будет восстановлена последовательность $A(m,\Theta^{(x)})_j^{\bullet}$, отличающаяся от исходной последовательности $A(m, \Theta^{(x)})_j$ значениями как минимум одного двоичного элемента. Поскольку ошибки в двухпризнаковых числах, возникающие при декодировании искаженных кодовых слов, не зависят друг от друга, то вероятность $P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)}$ ошибки в ν элементах будет равна

$$P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)} = n_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}\, P_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}, \quad (5)$$

где $n_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}$ – суммарное количество ν-кратных ошибок, которое может возникнуть при восстановлении двухпризнаковых структурных чисел $A(m,\Theta^{(x)})_j$ вследствие наличия искажений в кодовом слове N_L при его передачи по каналу связи; $P_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}$ – вероятность того, что при восстановлении m-элементных двухпризнаковых структурных чисел произойдет ν ошибок.

Исходя из особенностей двухпризнакового структурного представления при декодировании одного кода-номера восстанавливается вся m-элементная двоичная последовательность. Поэтому величина $n_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}$ определяется как суммарное количество двухпризнаковых структурных чисел, отличающихся попарно ν двоичными элементами. В тоже время выражение (5) не позволяет проводить оценку вероятности $P_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}$ в зависимости от свойств модели канала связи. Для того, чтобы связать свойства канала связи с процессом восстановления необходимо ввести в рассмотрение величину

$n(\nu(A_L))^{(\vartheta,\Lambda)}_{m,\nu}$, равную количеству ν-кратных ошибок при восстановлении чисел $A(m,\Theta^{(x)})_j$ в зависимости от количества ошибок $\nu(A_L)$ в кодовом слове N_L:

$$n^{(\vartheta,\Lambda)}_{r,\nu} = \sum_{\nu(A_L)=1}^{\nu(A_L)_{max}} n(\nu(A_L))^{(\vartheta,\Lambda)}_{r,\nu} . \qquad (6)$$

С учетом величин $n(\nu(A_L))^{(\vartheta,\Lambda)}_{m,\nu}$ выражение (5) примет вид

$$P^{(\vartheta,\Lambda,m)}_{\nu,L} = \sum_{\nu(A_L)=1}^{\nu(A_L)_{max}} n(\nu(A_L))^{(\vartheta,\Lambda)}_{r,\nu} P(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m} , \qquad (7)$$

где $P(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$ – вероятность того, что при передаче L-разрядного кодового слова (несущего информацию о номере двухпризнакового структурного числа) по каналу связи произойдет $\nu(A_L)$ ошибок.

В выражении (7) вероятность $P^{(\vartheta,\Lambda)}_{m,\nu}$ зависит от вероятностей $P(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$, которые в свою очередь определяются исходя из особенностей появления ошибок в канале связи. По условию теоремы рассматривается канал связи ДСК, следовательно, значение вероятности $P(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$ определяется на основе следующего соотношения:

$$P(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m} = n(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}\, p_0^{\nu(A_L)} q_0^{L-\nu(A_L)} , \qquad (8)$$

где $n(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$ – количество ошибок кратности $\nu(A_L)$ в кодовом слове N_L.

Величина $n(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$ зависит не только от разрядности кодового слова N_L, но и от свойств двухпризнаковых структурных чисел. Действительно, максимальное значение, которое может передаваться L-разрядным кодовым словом N_L равно $2^L - 1$. Однако, максимальное значение кода-номера двухпризнакового числа для заданных ограничений будет равно $V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)$:

$$V(m,\Theta^{(x)},\Lambda) \le 2^L - 1 . \qquad (9)$$

Из неравенства (9) вытекает, что не все комбинации ошибок будут допустимыми. Это приведет к уменьшению количества допустимых комбинаций ошибок по сравнению со случаем передачи исходных последовательностей без сжатия. Поэтому оценку величины $n(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$ предлагается проводить как количество комбинаций с заданным числом ошибок $\nu(A_L)$ (изменений с нуля на единицу), предшествующих номеру L-разрядного двоичного представления величины $V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)$:

$$V(m,\Theta^{(x)},\Lambda)_2 = \{a_1^{(max)},\dots,a_\xi^{(max)},\dots,a_L^{(max)}\} .$$

Отсюда величина $n(\nu(A_L))_{\vartheta,\Lambda,m}$ будет равна

$$n(\nu(A_L))_{\vartheta,m} = \sum_{\substack{i=1 \\ a_\xi^{(max)}=1}}^{L} \binom{(L-i)}{(\nu(A_L)-\beta_i)} , \qquad (10)$$

где двоичные разряды $a_i^{(max)}$ определяются на основе формулы (4) для $i=\overline{1,L}$.

Тогда подставив выражения (7), (8) и (10) в (5), получим формулу (2). Теорема доказана.

В тоже время различное количество ошибок $\nu(A_L)$ в кодовом слове N_L приведет к получению на приемной стороне различных кодов-номеров структурных чисел. Поэтому определение величины $n(\nu(A_L))^{(\vartheta,\Lambda)}_{m,\nu}$ зависит от величины $n_{r,\nu}$, равной количеству переходов, при которых восстановленная последовательность будет отличаться от исходной последовательности ровно ν двоичными элементами. Величина $n_{r,\nu}$ определяется для двоичных последовательностей, когда не накладываются ни какие ограничения. Для нахождения величины $n_{r,\nu}$ формулируется и доказывается следующая теорема.

Теорема о количестве переходов с заданным количеством ошибок. Количество $n_{r,\nu}$ переходов, при которых восстановленная r элементная последовательность будет отличаться от исходной r элементной последовательности ровно ν двоичными элементами вычисляется по формуле

$$n_{r,\nu} = \sum_{S_1=0}^{S_1^{(max)}} \sum_{S_2=S_2^{(min)}}^{S_2^{(max)}} n(S_1,S_2,r,\nu) ;$$

$$n(S_1,S_2,r,\nu) = \begin{cases} \dfrac{r!}{(S_1-\eta)!(S_2-\eta)!(\eta)!(r-S_1-S_2+\eta)!} \\ \to S_1 \ne S_2 ; \\ \dfrac{r!}{2((S-\eta)!)^2\,(\eta)!\,(r-2S+\eta)!} \\ \to S_1 = S_2 = S ; \end{cases}$$

$$\nu=\overline{0,r} ;\ 0 \le S_1 \le (r-[(\nu+1)/2]) ;\ \eta = [\frac{S_1+S_2-\nu}{2}],$$

где $n(S_1,S_2,r,\nu)$ – количество переходов между r элементной выходной последовательностью с количеством единиц, равным S_1, и r элементной исходной последовательностью с количеством единиц, равным S_2, при которых они отличаются ровно ν двоичными элементами; r – количество элементов в двоичной последовательности; r_{min} – минимальная длина последовательности необходимая для существования возможности появления ν ошибочных разрядов в выходной последовательности с числом единиц равным S_1; $S_1^{(max)}$ – максимальное число единиц в выходной последовательности для заданных величин r и ν, $S_1^{(max)} = (r - \nu + [\nu/2])$; $S_2^{(min)}$, $S_2^{(max)}$ – соответственно минимальное и максимальное число единиц в исходной последовательности для заданных величин ν, S_1 и r; η – количество одинаковых единичных элементов в исходной и выходной двоичных последовательностях.

Значение величины $n_{m,\nu}^{(\vartheta,\Lambda)}$ формируется путем запрета переходов между номерами N_L и $N_L^{\bullet}$. Данные запреты определяются исходя из свойств структурных чисел:

– наложением ограничений на возможные комбинации нулей и единиц, что обусловлено наложением ограничений на число серий единиц в допустимых зонах и на число позиций, допускающих появление единицы;

– наложением ограничений на нижнюю и верхнюю границы количества единичных элементов S: $\vartheta \le S \le m - \vartheta + 1$.

Сравнительные оценки вероятностей p_0^{ν}, $P_{\nu,L}^{(\vartheta,m)}$, $P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)}$ появления ошибок кратности ν для случая передачи по каналу связи исходных двоичных данных в несжатом виде, передачи кодовых конструкций однопризнаковых чисел и передачи кодовых конструкций двухпризнаковых структурных чисел приведены на рис. 1. При этом необходимо учитывать, что за счет структурного кодирования обеспечивается компактное представление данных: с коэффициентом сжатия для $\vartheta = 4$, $L = 4$, $m = 8$ равным $k = 2$ раза, а для $\vartheta = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_4 = 1$, $L = 2$, $m = 8$ и для $\vartheta = 4$, $\lambda_3 = 1$, $L = 2$, $m = 8$ равным $k = 4$ раза.

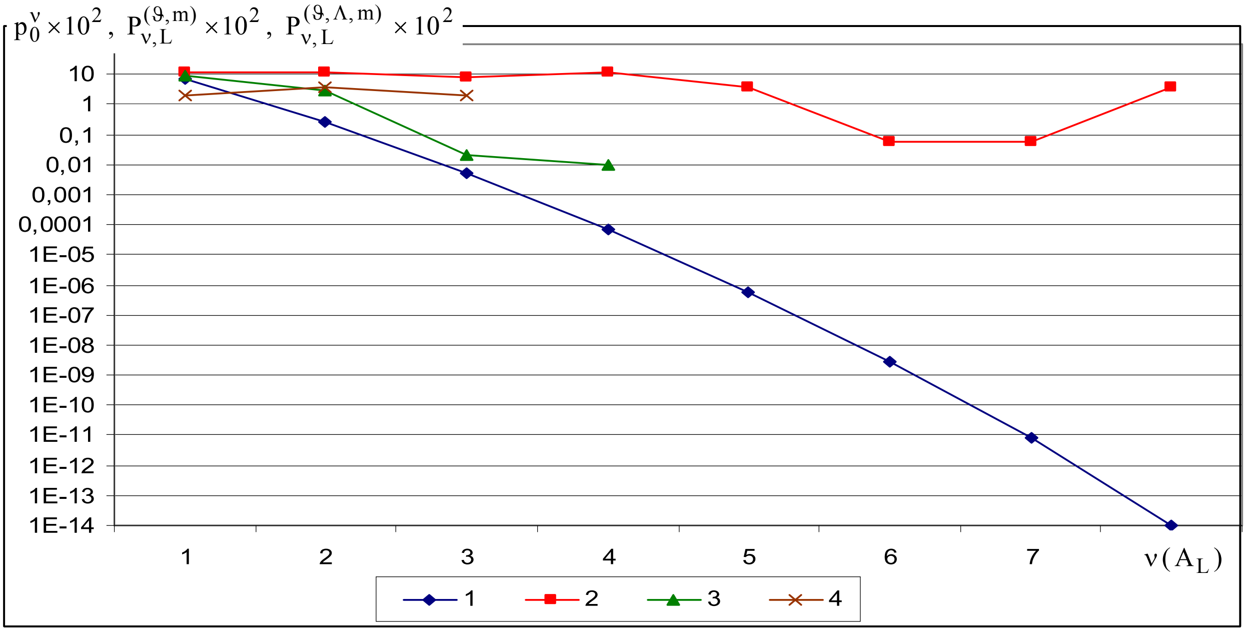

Рис. 1. Графики зависимости $p_0^{\nu} \times 10^2$, $P_{\nu,L}^{(\vartheta,m)} \times 10^2$, $P_{\nu,L}^{(\vartheta,\Lambda,m)} \times 10^2$ (в логарифмическом масштабе) от $\nu(A_L)$ для $p_0 = 10^{-2}$ при восстановлении:

1 – исходных последовательностей без сжатия, $m = 8$;

2 – однопризнаковых структурных чисел для $\vartheta = 4$, $L = 4$ и $m = 8$;

3 – двухпризнаковых структурных чисел для $\vartheta = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_4 = 1$, $L = 2$, $m = 8$;

4 – двухпризнаковых структурных чисел для $\vartheta = 4$, $\lambda_3 = 1$, $L = 2$ и $m = 8$

Из анализа графиков, представленных на рис. 1, следует, что:

1. Среди ошибок различной кратности наибольшую вероятность имеют однократные ошибки. Это соответствует передачи по каналу связи несжатых данных, однопризнаковых и двухпризнаковых структурных чисел. Для структурных чисел данная тенденция обусловлена тем, что основное количество однократных ошибок появляется как следствие возникновения однократных ошибок в кодовых словах, вероятность появления которых наибольшая.

2. При восстановлении двухпризнаковых кодовых конструкций вероятности ошибок большой степени кратности (от трех и выше) равны нулю. Минимальная степень кратности ошибок, начиная с которой вероятности их появления будут равны нулю, зависит от длины обрабатываемой последовательности и от структурных ограничений, накла-

дываемых на их элементы. Данная закономерность вызвана тем, что при наложении ограничений на позиции с допустимым появлением единиц происходит: сокращение количества допустимых последовательностей, отличающихся между собой различным количеством двоичных элементов; уменьшение максимальной степени кратности ошибок, которыми могут отличаться между собой двухпризнаковые структурные числа. Следовательно, двухпризнаковые структурные полиадические числа обладают свойством самокоррекции ошибок. В этом случае вероятность и количество ошибок после восстановления двухпризнаковых структурных чисел будет меньшим, чем вероятность и количество ошибок в кодовом слове, полученном из канала связи.

3. В зависимости от структурных характеристик двухпризнаковые кодовые конструкции могут обладать большей помехоустойчивостью по сравнению со случаем передачи по каналу связи несжатых двоичных последовательностей. Это проявляется в уменьшении вероятности однократных ошибок и равенству нулю ошибок большой кратности.

Выводы

1. Разработана методика оценки помехоустойчивости структурных кодовых комбинаций к ошибкам в канале связи. Созданная методика включает в себя:

– систему соотношений, обеспечивающих определение вероятности ошибки в заданном количестве элементов двухпризнаковых структурных чисел в двоичном полиадическом пространстве. Доказано, что вероятность искажения заданного количества элементов двухпризнаковых чисел дополнительно зависит от ограничений на допустимые позиции единичных элементов;

– соотношения, позволяющие оценить количество переходов, при которых восстановленная последовательность будет отличаться от исходной последовательности заданным количеством двоичных элементов. При этом такая оценка проводится как для двоичных последовательностей без учета структурных ограничений, так и для двухпризнаковых структурных чисел.

2. Вероятность однократных ошибок при восстановлении двухпризнаковых структурных чисел в двоичном полиадическом пространстве в зависимости от числа серий единиц и от значений компонент вектора полиадических ограничений уменьшается относительно вероятности однократных ошибок в несжатых данных, причем с ростом длины обрабатываемой последовательности и с увеличением количества позиций, запрещающих появления единиц выигрыш по вероятности однократных ошибок для двухпризнаковых чисел относительно несжатого представления увеличивается;

3. При восстановлении двухпризнаковых кодовых конструкций вероятности ошибок большой степени кратности (от трех и выше) равны нулю. Минимальная степень кратности ошибок, начиная с которой вероятности их появления будут равны нулю, зависит от длины обрабатываемой последовательности и от структурных ограничений, накладываемых на их элементы. Двухпризнаковые структурные полиадические числа обладают свойством самокоррекции ошибок. В этом случае вероятность и количество ошибок после восстановления двухпризнаковых структурных чисел будет меньшим, чем вероятность и количество ошибок в кодовом слове, полученном из канала связи.

4. В зависимости от структурных характеристик двухпризнаковые кодовые конструкции могут обладать большей помехоустойчивостью по сравнению со случаем передачи по каналу связи несжатых двоичных последовательностей. Это проявляется в уменьшении вероятности однократных ошибок и равенству нулю ошибок большой кратности. Поэтому для вероятности ошибки в одном разряде, не превышающей 10^{-4}, кодовые конструкции двухпризнаковых структурных чисел допускается передавать по каналу связи без внесения дополнительных корректирующих разрядов (без снижения степени сжатия). За счет свойства самокоррекции ошибок большой степени кратности допускается использование меньшего количества корректирующих разрядов.

Список литературы

1. *Баранник В.В., Юдин А.К. Метод восстановления двухпризнаковых двоичных чисел в полиадическом пространстве // Радіоелектронні та комп'ютерні системи. – 2006. – № 4. – С. 22-25.*
2. *Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных. – М.: Связь, 1977. – 184 с.*
3. *Орищенко В.И., Сонников В.Г., Свириденко В.А. Сжатие данных в системах сбора и передачи информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 184 с.*
4. *Королёв А.В., Баранник В.В. Помехоустойчивость полиадических кодов трансформант ДКП к ошибкам в канале связи // Системи обробки інформації. – Х.: ХФВ "Транспорт України". – 2000. – Вип. 4 (10). – С. 99-103.*
5. *Бернард С. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 1104 с.*

Поступила в редколлегию 29.01.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.И. Хаханов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.