УДК 519.15 : 001.57

В.П. Путятин, С.Н. Коваленко

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко

МОДЕЛИ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В АГРАРНО-ПРОМЫШЛЕННОМ КОМПЛЕКСЕ

Рассмотрена математическая модель задачи комбинаторной оптимизации, реализация которой позволяет организовать процесс имитационного моделирования различных климатических ситуаций в аграрно-промышленном комплексе (АПК) для принятия рациональных проектных решений. Предложена обобщенная структура процесса численной реализации математической модели, обсуждается постановка и пути решения прикладных задач.

математическая модель, комбинаторные задачи, оптимизация, имитационное моделирование, аграрно-промышленный комплекс

Введение

Постановка проблемы. Основной задачей является создание общего подхода к разработке математических моделей задач комбинаторной оптимизации на подмножествах базовых комбинаторных множеств (сочетаний, размещений, перестановок), с учетом заданных ограничений и случайных факторов. К таким задачам, например, приводит необходимость планирования очередности севооборотов сельскохозяйственных культур, формирования комплексов сельхозмашин, назначения сельскохозяйственной техники на выполнение работ, выбора технологии выращивания сельскохозяйственных культур и др. При этом необходимо учитывать предыдущую историю земледелия, например севообороты, за несколько лет назад и агротехнические ограничения.

В качестве таких ограничений, например, при планировании севооборота сельскохозяйственных культур, могут выступать следующие условия: биологические – разное отношение культур к сорнякам и вредным болезням; химические – культуры по-разному усваивают питательные вещества; физические – культуры по-разному влияют на физические свойства почвы; экологические – культуры по-разному реагируют на состояния экологической обстановки; технические – выращивание культур может осуществляться разными технологиями и разными машинотракторными комплексами.

Эта информация необходима для формирования, как запретных элементов комбинаторного множества, так и их ранжирования по предпочтению. Кроме того, необходимо учитывать динамику агроэкосистемы и климатические условия региона земледелия. Последнее обстоятельство требует включения в математическую модель задачи – случайных факторов, характеризующих климатические условия. От учета этих факторов зависит как урожайность сельскохозяйственных культур, которую необходимо максимизировать, так и суммарные энергетические затраты на выращивание культур – которые необходимо минимизировать. Кроме того, присутствие случайных факторов в математической модели дает возможность осуществления имитационного моделирования, результаты которого могут быть использованы при долгосрочном планировании деятельности сельхозпредприятий, например, при планировании севооборота и технологии выращивания культур на несколько лет вперед.

Анализ литературных источников. Постановка задач комбинаторной оптимизации с ограничениями на элементы комбинаторных множеств в виде запрета или предпочтения рассматривались, например, в работах [1 – 4].

Вопросы аппаратурной реализации математических моделей задач комбинаторной оптимизации рассматривались в работах [5 – 9].

Непосредственно задачи АПК исследовались в публикациях [3 – 10].

В работе [10] исследовались вопросы учета фактора риска при планировании производства продукции земледелия. Функцией цели является прибыль, а случайные климатические факторы учитываются с помощью обобщенного критерия успешного выращивания сельскохозяйственных культур.

Содержательная постановка основной оптимизационной задачи

Рассматриваемая агроэкосистема (рис. 1) включает следующие основные подсистемы: экологическая подсистема; подсистема сельскохозяйственных культур и земельных угодий; подсистема технологий и технических средств, обеспечивающих выполнение технологического процесса.

Экологическая подсистема характеризуется вектором $f \in \Phi$ климатических факторов, имеющих, в общем случае, вероятностный характер. Ими могут быть [10], например: f_1 – доля дней чрезвычайно благоприятных для выполнения технологического процесса выращивания сельскохозяйственных культур; f_2 – доля дней благоприятных; f_3 – доля дней неблагоприятных; f_4 – доля дней крайне неблагоприятных.

Предполагается также, что размеры рассматриваемой экологической системы (региона земледелия) таковы, что отмеченные климатические факторы одинаковы для всех угодий региона.

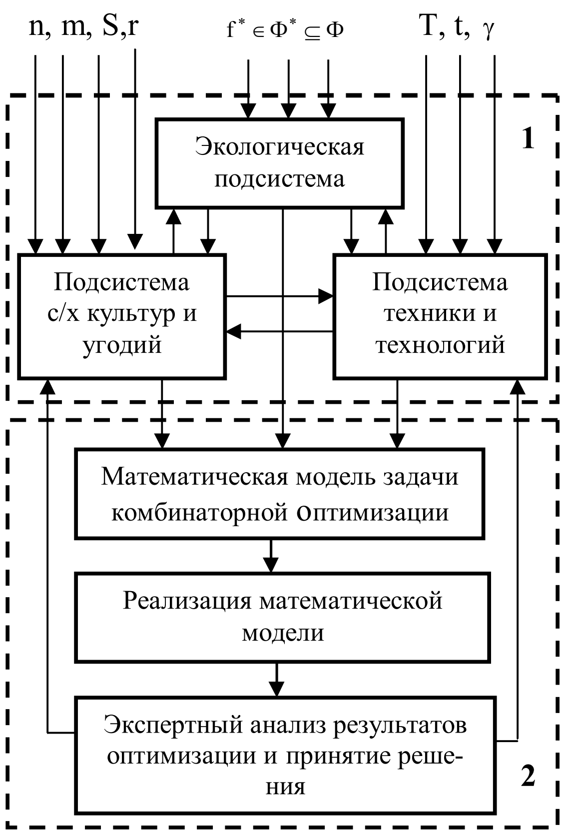

Рис. 1. Подсистемы агроэкосистемы (1) и их связь с подсистемой (2) поддержки принятия решений

Подсистема сельскохозяйственных культур и угодий характеризуется: перечнем и количеством n культур, которые планируется выращивать; вектором r урожайности той или иной культуры в данном регионе; количеством m и площадями $S_i\ (i = 1,2,...,m)$ сельскохозяйственных угодий; вариантами севооборотов предыдущих лет; агротехническими рекомендациями на планируемые варианты севооборотов.

Подсистема технологий выращивания сельскохозяйственных культур и технических средств, обеспечивающих выполнение технологического процесса, характеризуется векторами: имеющихся технологий T выращивания той или иной культуры; перечнем t сельскохозяйственных агрегатов и энергетических затрат γ для обеспечения выполнения соответствующей технологии.

Характеристикой эффективности Q функционирования системы (рис. 1) может быть рентабельность выращивания сельхозкультур. Могут задаваться несколько частных критериев (вектор $k \in K$). Например: k_1 – критерий биопотенциала растений, который необходимо максимизировать; k_2 – критерий затрат энергоресурсов, который нужно минимизировать; k_3 – критерий отрицательного воздействия на экосистему при выполнении технологического процесса, который необходимо минимизировать.

Математическая модель основной оптимизационной задачи

Задан общий критерий Q оптимизации системы. Его значение зависит от вектора частных критериев $k \in K$, которые, в свою очередь, зависят от элементов π комбинаторного множества Π и вектора значений климатических параметров $f \in \Phi$, задаваемых экспертом, или являющихся измеряемыми, наблюдаемыми, прогнозируемыми. На элементы комбинаторного множества $\pi \in \Pi$ наложена система ограничений G_1, выделяющая подмножество $\Pi^* \subset \Pi$. Область допустимых значений параметров f описывается системой ограничений G_2, которая выделяет подмножество $\Phi^* \subset \Phi$.

Тогда, при различных задаваемых значениях климатических параметров $f^* \in \Phi^* \subset \Phi$, определить

$$\underset{\pi \in \Pi^* \subset \Pi}{\mathrm{extr}}\ Q\left[\pi, f^* k(\pi, f^*)\right]; \qquad (1)$$

$$\pi^* = \arg \underset{\pi \in \Pi^* \subset \Pi}{\mathrm{extr}}\ Q\left[\pi, f^*, k(\pi, f^*)\right]. \qquad (2)$$

Отметим что, задавая в модели (1 – 2) различные значения вектора $f^* \in \Phi^* \subset \Phi$, а затем решая серию соответствующих задач, появляется возможность имитации различных климатических ситуаций в экологической подсистеме (рис. 1) и оценки результатов земледелия.

Решением задачи (1) – (2) будет кортеж $< \pi^*, Q^*, k^*, f^* >$, куда входят: элемент комбинаторного множества π^*; значение критерия Q^*; вектор значений частных критериев k^*; вектор f^* значений климатических параметров, ранее заданных в модели (1) – (2).

Иногда необходимо получить не только наилучшее решение, но и некоторое подмножество $\Pi^{**} \subset \Pi^{*} \subset \Pi$ «близких» решений, на множестве которых эксперт принимает окончательное решение. Для введения критерия близости элементов комбинаторного множества, необходимо задать метрику (транспозиционную, лексикографическую, цепную, алфавитную, инверсную и др.) на множестве Π. В этом случае необходимо, чтобы рациональные элементы $\pi^{**} \in \Pi^{**}$ принадлежали окрестности заданного радиуса R с центром в точке π^{*}. То есть $\rho(\pi^{*}, \pi^{**}) \le R$, где ρ метрика на комбинаторном множестве Π.

При принятии экспертом окончательного решения могут приниматься во внимание как формализованные, так и не формализуемые дополнительные критерии и ограничения.

Так в качестве окончательного решения, например, может быть принято значение элемента π^{**}, для которого $|\psi(\pi^{**}) - \psi(\pi^{*})| \le \varepsilon$, где ψ – дополнительный критерий, задаваемый экспертом, а ε – заданная величина.

Математические модели частных задач оптимизации

Рассмотрим конкретизацию основной модели (1) – (2) для случая различных соотношений между числом культур n и числом m полей т.е. осуществим формирование комбинаторного подмножества $\Pi^{*} \subset \Pi$, описываемого ограничениями G_1.

Модель 1. Пусть $m = n$ и на поле с номером j назначается культура с номером i_j.

Введем перестановку

$$\pi = (i_1, i_2, ..., i_m)\,;\, i_q \ne i_p \;\forall\, q \ne p;\, q, p, i_q, i_p \in J_m, \quad (3)$$

где $J_m = (1,2,...,m)$ – множество натуральных чисел.

Перестановка π определяет варианты назначения культур на поля. При этом критерий Q эффективности функционирования системы рассматривается, как функционал, заданный на множестве Π перестановок $\pi \in \Pi$.

Поскольку одна культура назначается на одно поле, а каждому полю отводится только одна культура, то необходимо выполнение следующих ограничений

$$i_q \ne i_p \;\forall q \ne p\; (q, p = 1,2,..., m)\,. \quad (4)$$

Кроме того, учет севооборотов прежних лет требует исключения из множества Π тех перестановок $\pi_z\ (z = 1,2,...,v)$, которые являются недопустимыми с точки зрения аграрной науки. Эти условия могут задаваться следующими ограничениями

$$\pi \ne \pi_z\ (z = 1,2,...,v)\,. \quad (5)$$

На элементы области допустимых решений могут задаваться дополнительные условия в виде предпочтения одних элементов комбинаторного множества над другими. В этом случае

$$\pi \succ \pi_t\ (t = 1,2,...,b)\text{, если } \psi(\pi) \succ \psi(\pi_t)\,, \quad (6)$$

где ψ – критерий предпочтения; $\succ$ – операция предпочтения.

Таким образом, для рассматриваемого случая область допустимых решений в основной модели (1) – (2) описывается системой ограничений (4 – 6).

Модель 2. Пусть $m > n$. Элементами комбинаторного множества являются элементы

$$\pi = (i_1, i_2, ..., i_n)\,;\, i_q \ne i_p \;\forall\, q \ne p;\, i_q \in J_m; q, p \in J_n \quad (7)$$

множества размещений A_m^n. Аналогично изложенному в предыдущем подразделе, записываются ограничения (4) на принадлежность одной культуры одному полю, ограничения (5) на недопустимость некоторых элементов комбинаторного множества, а также условия (6) предпочтения одних элементов над другими. Таким образом, формируется система ограничений G_1, описывающая область допустимых решений основной модели (1) – (2) для рассмотренной в этом подразделе задачи.

Заметим, что если ввести $c = m - n$ «фиктивных» культур, то эта модель сводится к модели 1 о поиске рациональной перестановки. При этом назначение «фиктивных» культур на поля можно трактовать, как перебор вариантов назначения культур на поля с учетов планирования паров.

Отметим также, что приведенные постановки частных задач и подходы к построению соответствующих математических моделей иллюстрируют общность такого подхода к многочисленным прикладным задачам комбинаторной оптимизации с ограничениями.

Модель 3. Требуется, например, максимизировать разность между прибылью от реализации произведенной продукции земледелия и затратами на обеспечение технологического процесса возделывания культур. В этом случае задача поиска варианта назначения культур на поля с учетом предшественников в общем виде сводится к поиску

$$\max\left[Q_1(\pi, S, s) r F_1(f) - Q_2(\pi, S) \gamma F_2(f)\right], \quad (8)$$

где Q_1 – прибыль от реализации продукции земледелия; Q_2 – расходы на технологический процесс выращивания культур; S – вектор площадей полей; r – вектор максимально возможных урожайностей культур в данном регионе; $0 \le F_1 \le 1$ – поправочный коэффициент компонент вектора урожайности s культур в зависимости от значений вектора f климатических факторов; $0 \le F_2 \le 1$ – поправочный коэффициент компонент вектора γ энергетических затрат от значений вектора f климатических факторов.

При заданных значениях S, s и экспертном оценивании параметров F_1, F_2, r, γ, математическая модель имеет следующий вид

$$\max_{\pi\in\Pi^*}\left[Q_1(\pi) - Q_2(\pi,)\right] = \max_{\pi\in\Pi^*} Q(\pi), \qquad (9)$$

где π – элемент комбинаторного множества Π^*, описываемого системой ограничений подобной (4) – (6).

Таким образом, постановка задачи в виде (9) приводит к частным моделям 1 и 2.

Особенности математической модели (1) – (2) и ее численной реализации

Размерность пространства параметров, в котором определяется экстремум критерия Q, зависит в основном от природы комбинаторного множества (сочетания, размещения, перестановки и др.) и числа его элементов.

Число ограничений G_1, описывающих область допустимых решений Π^*, зависит от: количества ν заданных запрещенных элементов π_z $(z = 1,2,...,v)$ комбинаторного множества; количества b условий предпочтения одних элементов над другими; природы комбинаторного множества (сочетания, размещения, перестановки и др.), что определяет количество ограничень (4).

Критерий $Q\left[\pi, f^* k(\pi, f^*)\right]$ оптимизации системы, в общем случае, является нелинейным. Поэтому рассматриваемая математическая модель (1) – (2) относится к многомерным нелинейным задачам математического программирования. Число локальных экстремумов в основном зависит от природы комбинаторного множества и числа его элементов.

Для определенности рассмотрим упрощение модели (1) – (2). Пусть $Q(\pi)$ и $n = m$, то есть комбинаторное множество состоит из $n!$ перестановок. В практических задачах $n \approx 10, 20$. То есть, для полного перебора значений $Q(\pi)$ необходимо рассмотреть $20!$ перестановок. Основываясь на результатах [1, с.73] подсчета и оценки временных затрат в предположении, что на вычисление значения критерия $Q(\pi)$ необходима всего лишь одна операция ПЭВМ, то временные затраты метода полного перебора исчисляются несколькими десятками лет.

Что касается применения метода Монте–Карло, то для случая задания критерий Q в аналитическом виде, существует возможность получения дополнительной вычислительной информации о свойствах критерия Q. Однако, получаемая на базе вычислительного эксперимента информация только частично улучшает ситуацию, а «проклятие размерности» сохраняется.

В силу дискретности комбинаторного множества Π и, естественно, дискретности пространства искомых параметров, применение градиентных методов в «чистом виде» не представляется возможным.

На основе анализа особенностей модели (1) – (2), наиболее приемлемыми методами решения таких задач являются методы поисковой оптимизации. Учитывая опыт решения подобных комбинаторных задач оптимизации [1, 2], целесообразно воспользоваться методом сужающихся окрестностей (МСО) [1].

На рис. 2 приведена обобщенная структура организации вычислительного процесса для численной реализации математической модели (1) – (2).

Остановимся на особенностях одного из основных блоков – блока оптимизации, приведенного на рис. 1.

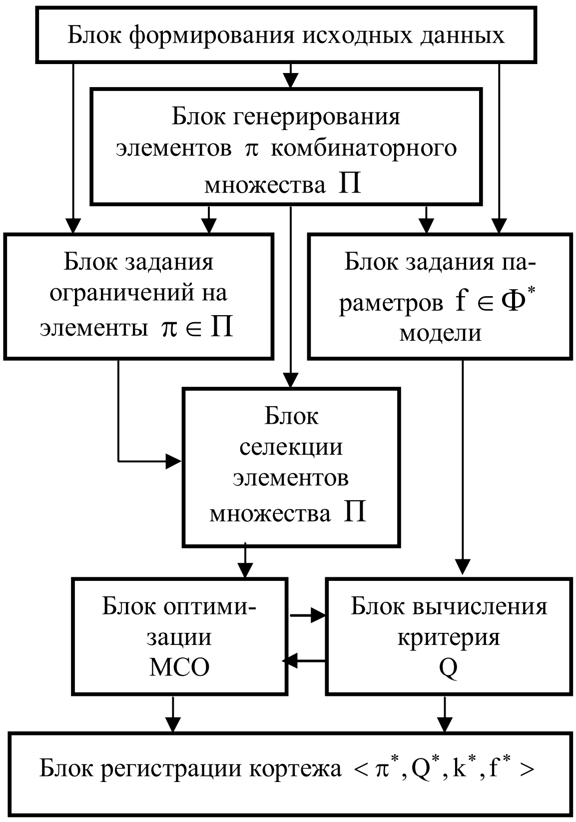

Рис. 2. Структура основных этапов реализации математической модели (1) – (2)

На первом этапе оптимизации, для поиска первого приближения, применяется метод Монте–Карло. Для этого осуществляется моделирование случайного процесса, в результате чего выделяется лучшее значение критерия Q и соответствующего элемента π^* комбинаторного множества Π^*.

На втором этапе применяется метод сужающихся окрестностей [1], дающий возможность формирования вокруг π^* окрестности $O(\pi^*, R) \subset \Pi^*$ заданного радиуса R. Затем осуществляется генерирование элементов $\pi \in O(\pi^*, R) \subset \Pi^*$ и вычисления значений критерия Q. После чего выделяется лучшее значение Q^* критерия и соответствующего элемента π^* комбинаторного множества Π^*. Если поиск в окрестности $O(\pi^*, R)$ перспективен, то центр окрестности переносится в новую точку и поиск повторяется. Уменьшение радиуса R окрестности $O(\pi^*, R) \subset \Pi^*$ происходит после выполнения условия $N > N^*$, где N^* заданное число испытаний в серии. Этот этап решения задачи заканчивается поиском пары $< \pi^*, Q^* >$, то есть лучшего значения π^* и соответствующего ему значения критерия Q^*.

На третьем этапе пара $< \pi^*, Q^* >$ является исходной для применения метода вектора спада. Дальнейшая оптимизация осуществляется в окрестности $O(\pi^*, 1) \subset \Pi^*$, то есть в окрестности единичного радиуса.

Отметим, что специфика математических моделей рассматриваемых задач (многомерность, комбинаторный характер, нелинейность, многоэкстремальность) такова, что необходимо создание общего подхода к разработке специализированных цифровых вычислительных устройств для повышения эффективности (по затратам памяти, затратам времени и по точности) решения комбинаторных задач с ограничениями [1 – 9]. Это обусловлено тем обстоятельством, что при численной реализации на ПЭВМ задач комбинаторной оптимизации с ограничениями требуются значительные временные затраты.

В работах [5 – 7] предложена, обоснована и запатентована структура и состав основных цифровых блоков для аппаратурной реализации рассматриваемых математических моделей.

Выводы

Предложена математическая модель задачи комбинаторной оптимизации с учетом специфических ограничений.

Исследованы ее особенности и особенности частных моделей.

Предложен метод численной реализации на базе метода Монте-Карло, метода сужающихся окрестностей и метода вектора спада.

Список литературы

1. *Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – К.: Наук. думка. – 1980. – 208 с.*
2. *Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. – К.: Наук. думка. – 1988. – 192 с.*
3. *Коваленко С.Н. Комбинаторные задачи принятия решений о рациональном севообороте // Матер. 10-го юбилейного Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Х.: ХНУРЭ, 2006. – С. 418.*
4. *Коваленко С.М., Пастухов В.І., Путятін В.П. Комп'ютерні комбінаторні моделі в САПР АПК // Управління розвитком. Зб. наук. ст. – Х.: ХНЕУ, 2006. – № 6. – С. 73-74.*
5. *Патент. № и 200610634. Україна, МКИ G 06 F 15/20. Спосіб виділення допустимих елементів комбінаторних множин / С.М. Коваленко, В.П. Путятін (Україна). – Заявл. 09.10.06; Пріор. 25.12.06. – 6 с.*
6. *Патент. № и 200611118. Україна, МКИ G 06 F 15/20. Селектор елементів комбінаторних множин. / С.М. Коваленко, В.П. Путятін, І.О. Фурман (Україна). – Заявл. 23.10.06; Пріор. 22.12.06.– 6 с.*
7. *Патент. №. и 200610634. Україна, МКИ G 06 F 15/20. Пристрій для комбінаторної оптимізації / С.М. Коваленко, В.П. Путятін (Україна). Заявл. 09.10.06; Пріор. 25.12.06. – 6 с.*
8. *Патент. № 47901 А. Україна, МКИ А 01 В 49/00. Спосіб визначення раціонального складу агрегатів для польових робіт / В.І. Пастухов, В.П. Путятін (Україна). –Заявл. 22.10.2001; Опубл. 15.07.2002. Бюл. № 7. – 3 с.*
9. *Патент. № 48638 А. Україна, МКИ G 06 F 15/00. Пристрій для моделювання графа агротехнологічного процесу / В.І. Пастухов, В.П. Путятін (Україна). – Заявл. 30.10.2001; Опубл. 15.08.2002. Бюл. № 8. – 3 с.*
10. *Раскин Л.Г., Карпенко В.В. Рациональное распределение посевной площади при возделывании сельскохозяйственных культур в условиях риска. // Вестник НТУ «ХПИ». Системный анализ, управление и информационные технологии. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 36. – С. 27-32.*

Поступила в редколлегию 13.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Левыкин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.